Lösungen Repetitionsprüfung

1. (7.5 P.) Gegeben ist die Funktion f mit der Vorschrift

$$f(x) = \frac{x}{(1+2x)^2}$$

a) (0.5 P.) Berechne den Schnittpunkt P von f mit der y-Achse.

- $f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P(0|0)}}$

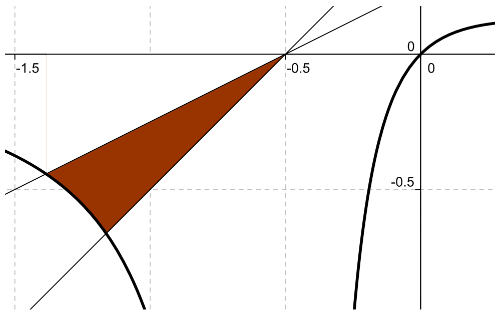
b) (1 P.) Der Graph von f schliesst im Bereich $1 \leq x \leq 5$ mit der x Achse eine Fläche ein. Diese wird nun um die x-Achse rotiert. Berechne das Volumen des entstandenen Rotationskörpers.

- $\underline{\underline{V_x}} = \pi \int\limits_1^5 \left(\frac{x}{(1+2x)^2}\right)^2 \mathrm{d}x \approx \underline{\underline{0.06}}$

c) (3 P.) Gesucht ist die Vorschrift einer Geraden g, die durch den Punkt (-2|2) geht und den Graphen von f berührt.

- $g : y = mx + n$
- $(-2|2)$ in g: $2 = -2m + n \Rightarrow n = 2m + 2 \Rightarrow g : y = mx + 2m + 2$
- $g(x_0) = f(x_0) \Rightarrow mx_0 + 2m + 2 = \frac{x_0}{(1+2x_0)^2}$ (Gl.1)
- $g'(x_0) = f'(x_0) \Rightarrow m = \frac{-(2x_0-1)}{(2x_0+1)^3}$ (Gl.2)
- Lösen des GLS: $m = -3, x_0 = -1$
- $n = -6 + 2 = -4 \Rightarrow \underline{\underline{g : y = -3x - 4}}$

d) (3 P.) Gegeben sind die Geraden $g_1 : y = 0.5x + 0.25$ und $g_2 : y = x + 0.5$. Die beiden Geraden und f schliessen ein Flächenstück ein. Berechne dessen Inhalt.



- Schnittpunkte:
  - $0.5x + 0.25 = x + 0.5 \Rightarrow -0.5x = 0.25 \Rightarrow x = -0.5 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow S_1(-0.5|0)$
  - $\frac{x}{(1+2x)^2} = 0.5x + 0.25 \Rightarrow x \approx -1.38 \Rightarrow y \approx -0.44 \Rightarrow S_2(-1.38|-0.44)$
  - $\frac{x}{(1+2x)^2} = x + 0.5 \Rightarrow x \approx -1.16 \Rightarrow y \approx -0.66 \Rightarrow S_2(-1.16|-0.66)$
- $\underline{\underline{A}} = \frac{(-0.5-(-1.16)\cdot 0.66)}{2} + |\int\limits_{-1.38}^{-1.16} \frac{x}{(1+2x)^2} \mathrm{d}x| - |\int\limits_{-1.38}^{-0.5} 0.5x + 0.25 \,\mathrm{d}x| \approx \underline{\underline{0.425}}$

2. (8.5 P.) Gegeben ist eine Funktion f mit $f_t(x) = 4e^{tx} - e^{2tx} (t > 0)$.

   a) (1 P.) Berechne die Nullstelle von f in Abhängigkeit von t.
      - $f_t(x) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{2\ln(2)}{t}}}$

   b) (2 P.) Berechne die(den) Extremalpunkt(e) die Art (Maximum,Minimum) in Abhängigkeit von t.
      - $f_t'(x) = 4te^{xt} - 2te^{2xt}$
      - $f_t'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\ln(2)}{t}$
      - $f_t''(x) = 4t^2e^{xt} - 4t^2e^{2xt}$
      - $f_t''(\frac{\ln(2)}{t}) = -8t^2 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Ma(\frac{\ln(2)}{t}|4)}}$

   c) (2 P.) An welcher Stelle ist die Steigung des Graphen extremal ? Handelt es sich um eine Maximum oder Minimum ?
      - $f_t''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
      - $f_t'''(x) = -4t^3 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Ma(0|3)}}$

   d) (3.5 P.) Wir setzen $t = 1$. Es soll nun Rechteck mit maximalem Flächeninhalt so einbeschrieben werden, dass sich zwei Ecken auf der x-Achse und die anderen zwei Ecken auf dem Graphen von f befinden. Welche Länge und welche Breite hat dieses Rechteck ?
      - x_1 bezeichne die x-Koordinate der linken Ecke, x_2 bezeichne die x-Koordinate der rechten Ecke.
      - ZF: $Z(x_1,x_2) = (x_2 - x_1) \cdot f(x_1) = (x_2 - x_1)(4e^{x_1} - e^{2x_1})$
      - NB: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 4e^{x_1} - e^{2x_1} = 4e^{x_2} - e^{2x_2} \Rightarrow x_2 = \ln(4 - e^{x_1})$
      - Einsetzen in ZF: $Z(x_1) = (\ln(4 - e^{x_1}) - x_1) \cdot (4e^{x_1} - e^{2x_1})$
      - $Z'(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 \approx -0.35$ oder $x_1 \approx 1.19$
      - $\Rightarrow x_2 \approx 1.19$ oder $x_2 \approx -0.35$
      - Die zweite Variante fällt weg weil $x_2 > x_1$
      - Damit: $\underline{\underline{l_{Min}}} = x_2 - x_1 \approx \underline{\underline{1.54}}$
      - $\underline{\underline{b_{Min}}} = f(x_1) \approx \underline{\underline{2.32}}$

3. (9 P.) Die Verbrauchermarktkette RENA bezieht Glühbirnen von den zwei Herstellern A und B und lässt sie mit ihrem eigenen Emblem versehen, so dass die Herstellerfirma nicht mehr zu erkennen ist. Von A werden 70% des Bedarfs bezogen, die restlichen 30% liefert B. Unter den von A hergestellten Glühbirnen sind im Mittel 3% bereits bei der Anlieferung defekt, bei den Glühbirnen aus dem Werk B beträgt der Anteil der defekten Birnen durchschnittlich sogar 6%.

   a) (1.5 P.) Dem Lagerbestand wird eine Glühbirne zufällig entnommen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie defekt ist ?

   - D:Die Lampe ist Defekt
   - $\underline{\underline{P(D)}} = 0.7 \cdot 0.03 + 0.3 \cdot 0.06 = \underline{\underline{0.039}}$

   b) (1.5 P.) Dem Lagerbestand wird eine Glühbirne zufällig entnommen und man stellt fest, dass sie defekt ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt sie vom Hersteller B ?

   - D:Die Lampe ist Defekt; B:von Hersteller B bezogen.
   - $\underline{\underline{P_D(B)}} = \dfrac{P(D \cap B)}{P(D)} = \dfrac{0.3 \cdot 0.06}{0.7 \cdot 0.03 + 0.3 \cdot 0.06} \approx \underline{\underline{0.462}}$

   c) (3.5 P.) Ein einzelner RENA-Markt bezieht eine Lieferung von 20 Glühbirnen, die sämtlich von A hergestellt wurden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

      i) (1.5 P.) genau 3 Glühbirnen defekt ?
      - X : Anzahle defekte Glühbirnen
      - $\underline{\underline{P(\text{X=3})}} = \binom{20}{3} \cdot 0.03^3 \cdot 0.97^{17} \approx \underline{\underline{0.018}}$

      ii) (2 P.) sind mehr als 2 Glühbirnen defekt ?
      - $\underline{\underline{P(\text{X>2})}} = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \binom{20}{0} \cdot 0.03^0 \cdot 0.97^{20} - \binom{20}{1} \cdot 0.03^1 \cdot 0.97^{19} - \binom{20}{2} \cdot 0.03^2 \cdot 0.97^{18} \approx \underline{\underline{0.021}}$

   d) (2.5 P.) Der Einkaufspreis einer von A hergestellten Glühbirne beträgt 1.12 Fr. Der Verkaufspreis im Markt beträgt 1.60 Fr. Wegen Reklamationen der Kunden muss RENA erfahrungsgemäss bei 80% der verkauften defekten Glühbirnen den Kaufpreis zurückerstatten (die anderen 20% reklamieren nicht). RENA kann aufgrund vertraglicher Abmachungen die defekten Birnen auch nicht mehr dem Hersteller zurückgeben. Berechne den durchschnittlichen Gewinn pro Glühbirne.

   - RENA erzielt einen Gewinn von 0.48 Fr., wenn die Glühbirne intakt ist und wenn eine defekte Glühbirne nicht zurückgebracht wird.
   - RENA macht einen Verlust von 1.12 Fr., wenn eine defekte Glühbirne beanstandet wird.
   - X: Erzielter Gewinn
   - $\underline{\underline{E(X)}} = 0.48 \cdot (0.03 \cdot 0.2 + 0.97) - 1.12 \cdot 0.03 \cdot 0.8 \approx \underline{\underline{0.44\,\text{Fr}}}$