Lösungen Repetitionsprüfung

1. (10.5 P.) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x\sqrt{9-x}}{3}$

   a) (1 P.) Berechne die Nullstellen von f. Gib Dein(e) Ergebnis(se) in der Form $N(\ldots|\ldots)$ an.
   - $0 = \frac{x}{3}\sqrt{9-x} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 9 \Rightarrow \underline{\underline{N_1(0|0), N_2(9|0)}}$

   b) (1.5 P.) Berechne die Extremalstellen und die Art. Gib Dein Ergebnis in der Form Mi(...|...) oder Ma(...|...) an.
   - $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 6$ (Kandidat)
   - $f''(6) = -\frac{\sqrt{3}}{6} < 0 \Rightarrow Ma(6|f(6)) = \underline{\underline{Ma(6|3.46)}}$

   c) (1 P.) Der Graph von f und die x-Achse schliessen ein Flächenstück ein. Bei Drehung dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper. Berechne dessen Volumen.
   - $\underline{\underline{V_x}} = \pi \int\limits_0^9 \left(\frac{x}{3}\sqrt{9-x}\right)^2 \approx \underline{\underline{190.85}}$

   d) (3 P.) Gesucht ist die Vorschrift einer Geraden g, die durch den Punkt (2|2) geht und den Graphen von f berührt.
   - $g: y = mx + n$
   - $(2|2)$ in g: $2 = 2m + n \Rightarrow n = 2 - 2m \Rightarrow g: y = mx + 2 - 2m$
   - $g(x_0) = f(x_0) \Rightarrow mx_0 + 2 - 2m = \dfrac{x_0\sqrt{9-x_0}}{3}$ (Gl.1)
   - $g'(x_0) = f'(x_0) \Rightarrow m = \dfrac{\sqrt{9-x_0}}{3} - \dfrac{x_0}{6\sqrt{9-x_0}}$ (Gl.2)
   - Lösen des GLS: $m = 0.49, x_0 = 3.73$
   - $n = 2 - 2 \cdot 0.49 = 1.02 \Rightarrow \underline{\underline{g: y = 0.49x + 1.02}}$

   e) (4 P.) Zu welchem Punkt R auf dem Graphen hat der Punkt Q(5|0) den kleinsten Abstand ? Zu welchem Punkt S auf dem Graphen hat Q den grössten Abstand ? Gib Deine Ergebnisse in der Form R(..|..) bzw. S(..|..) an.
   - ZF: $Z(x,y) = \sqrt{(x-5)^2 + y^2}$
   - NB: $y = \frac{x}{3}\sqrt{9-x}$
   - ZF: $Z(x) = \sqrt{x^2 + \frac{x^2(9-x)}{9}}$
   - $Z'(x) = 0 \Rightarrow x_1 \approx 3.55, x_2 \approx 8.45$
   - $Z''(3.55) \approx 0.26 > 0 \Rightarrow Mi \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{S(3.55|2.76)}}}$
   - $Z''(8.45) \approx -0.20 < 0 \Rightarrow Ma \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Q(8.45|2.09)}}}$

2. (6 P.) Gegeben ist die eine Funktion f mit einem Parameter $t > 0$ (Funktionenschar):

$$f_t(x) = \frac{t^3x^3 - 8}{4tx^2}$$

a) (1 P.) Wie muss t gewählt werden, damit die x-Achse an der Stelle $x = 4$ geschnitten wird ?

- $0 = \dfrac{64t^3 - 8}{64t} \Rightarrow \underline{\underline{t = 0.5}}$

b) (2 P.) Bestimme den Extremalpunkt von f in Abhängigkeit von t. Gib Dein Ergebnis in der Form Ma(..|..) oder Mi(..|..) an.

- $f_t'(x) = \dfrac{t^3x^3 + 16}{4tx^3}$
- $f_t'(x) = 0 \Rightarrow x \approx -\frac{2.52}{t}$
- $f_t''(-\frac{2.52}{t}) = -0.30t^3 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Ma(-\frac{2.52}{t} | -0.94t)}}$

c) (3 P.) Wir setzen wiederum $t = 1$. Gegeben sind zusätzlich die Geraden $g_1 : y = -x + 2$ und $g_2 : y = -0.2x + 2$. Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das von f, g_1 und g_2 eingeschlossen wird.

- Schnittpunkte:
  - $-x + 2 = \dfrac{x^3 - 8}{4x^2} \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow S_1(2|0)$
  - $-0.2x + 2 = \dfrac{x^3 - 8}{4x^2} \Rightarrow x \approx 4.65 \Rightarrow y \approx 1.07 \Rightarrow S_2(4.65|1.07)$
- $\underline{\underline{A}} = \displaystyle\int_0^{4.65} -0.2x + 2\,\mathrm{d}x - \frac{2 \cdot 2}{2} - \int_2^{4.65} \frac{x^3 - 8}{4x^2}\mathrm{d}x \approx \underline{\underline{3.50}}$

3. (8.5 P.) Beim Verkauf von Milch soll in einem Marktversuch die Wiedereinführung von Mehrwegflaschen (Literflaschen) untersucht werden. Dazu werden die Flaschen durchnumeriert und in Kästen zu je 20 Stück ausgegeben. Die Wahrscheinlichkeit dass eine Flasche nach Gebrauch zurückgegeben wird, beträgt 0.9. Wir gehen davon aus,

   - dass alle numerierten Flaschen verkauft werden.
   - dass jede Flasche wieder gefüllt und verkauft wird.

   Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,

   a) (1.5 P.) dass von einem Kasten mehr als 3 Flaschen nicht zurückgegeben werden ?
      - X_1: Anzahl Flaschen, die nicht zurückgegeben werden.
      - $\underline{\underline{P(X_1 > 3)}} = 1 - P(X_2 \leq 3) \approx 1 - 0.8670 = \underline{\underline{0.133}}$

   b) (2 P.) dass bei 15 Kästen von mindestens einem alle Flaschen zurückgegeben werden ?
      - X_2: Anzahl Kästen, bei denen alle Flaschen zurückgegeben wurden.
      - $\underline{\underline{P(X_2 \geq 1)}} = 1 - P(X_2 = 0) \approx 1 - 0.878^{15} \approx \underline{\underline{0.857}}$

   c) (1.5 P.) dass sich mit einer Flasche genau 4 Liter Milch verkaufen lassen ?
      - $\underline{\underline{P(\text{genau 4 Liter})}} = 0.9^3 \cdot 0.1 \approx \underline{\underline{0.073}}$

   d) (2 P.) dass sich mit einer Flasche höchstens 4 Liter Milch verkaufen lassen ?
      - $\underline{\underline{P(\text{höchstes 4 Liter})}} = 0.1 + 0.9 \cdot 0.1 + 0.9^2 \cdot 0.1 + 0.9^3 \cdot 0.1 \approx \underline{\underline{0.344}}$

   e) (1.5 P.) In einer Kiste sind 70% der Flaschen braun und 30% weiss. Man hat festgestellt, dass die brauen Flaschen eine Rückgabewahrscheinlichkeit von 93% haben, während die weissen Flaschen nur zu 83% zurückgegeben werden. Zufällig wird nun eine zurückgebene Flasche ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie braun ist ?
      - $P_Z(B) = \dfrac{P(Z \cup B)}{P(Z)} = \dfrac{0.7 \cdot 0.93}{0.7 \cdot 0.93 + 0.3 \cdot 0.83} \approx \underline{\underline{0.72}}$