

Lösungen Repetition Potenzen

Formeln:

$$a^{q_1} \cdot a^{q_2} = a^{q_1+q_2}$$

Merksatz: „Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem wir die Basis beibehalten und die Exponenten addieren.“

$$a^{q_1} : a^{q_2} = a^{q_1-q_2}$$

Merksatz: „Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem wir die Basis beibehalten und die Exponenten subtrahieren.“

$$(a^{q_1})^{q_2} = a^{q_1 \cdot q_2}$$

Merksatz: „Potenzen werden potenziert, indem wir die Exponenten multiplizieren.“

$$a^{q_1} \cdot b^{q_1} = (ab)^{q_1}$$

Merksatz: „Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem wir den Exponenten beibehalten und die Basen multiplizieren.“

$$a^{q_1} : b^{q_1} = (a : b)^{q_1}$$

Merksatz: „Potenzen mit gleichen Exponenten werden dividiert, indem wir den Exponenten beibehalten und die Basen dividieren.“

Übungen

- 1.
2. Das Produkt aller Zahlen jeder Zeile, jeder Spalte und beider Diagonalen ist gleich 2^{14} . Fülle die Tabelle aus.

2^{11}	2^{-2}	2^{-3}	2^8
2^0	2^5	2^6	2^3
2^4	2	2^2	2^7
2^{-1}	2^{10}	2^9	2^{-4}

- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
7. Berechne ohne TR. Schreibe Dein Ergebnis als Potenz mit rationalem Exponenten bzw. als Zahl wenn möglich.

a) $5^{\frac{1}{6}} : 5^{\frac{1}{7}} = 5^{\frac{1}{6} - \frac{1}{7}} = 5^{\frac{1}{42}}$

b) $\left(a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{3}}\right) : a = \left(a^{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}}\right) : a = a^{\frac{1}{12}} : a = a^{-\frac{11}{12}}$

c) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}} = 2^{\frac{2}{15}}$

d) $\left(\sqrt[8]{5^3} \cdot \sqrt[5]{5^6}\right) : \sqrt[40]{5} = \left(5^{\frac{3}{8}} \cdot 5^{\frac{6}{5}}\right) : \sqrt[40]{5} = \left(5^{\frac{15}{40}} \cdot 5^{\frac{48}{40}}\right) : \sqrt[40]{5} = 5^{\frac{63}{40}} : 5^{\frac{1}{40}} = 5^{\frac{62}{40}} = 5^{\frac{31}{20}}$

8. Ermittle mit Hilfe der Potenzregeln und ohne TR die Lösungsmenge der untenstehenden Gleichungen in \mathbf{Q} .

a) $9^x = 3 \Rightarrow (3^2)^x = 3 \Rightarrow 3^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = 0.5$

b) $8^x = 4 \Rightarrow 2^{3x} = 2^2 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow \underline{x = 2/3}$

c) $1000^x = 0.1 \Rightarrow 10^{3x} = 10^{-1} \Rightarrow \underline{x = -1/3}$

d) $8^{-0.25} = 2^x \Rightarrow (2^3)^{-0.25} = 2^x \Rightarrow 2^{-0.75} = 2^x \Rightarrow \underline{x = -0.75}$

9. Ermittle die Lösungsmenge der untenstehenden Gleichung, indem Du die Gleichung mit Hilfe der Substitution in eine Gleichung 2. Grades überführst.

a) $4 \cdot 2^x + 32 = 4^x$

- $4 \cdot 2^x + 32 = (2^2)^x$

- $4 \cdot 2^x + 32 = (2^x)^2 \mid 2^x = u$

- $4 \cdot u + 32 = u^2$

- $u^2 - 4 \cdot u - 32 = 0$

- $(u - 8)(u + 4) = 0$

- $u_1 = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

- $u_2 = -4 \Rightarrow 2^x = -4 \Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösung

- $\mathbf{L} = \{3\}$

b) $9^{2x} + 3 = 4 \cdot 9^x$

- $(9^x)^2 + 3 = 4 \cdot 9^x \mid 9^x = u$
- $u^2 + 3 = 4 \cdot u$
- $u^2 - 4u + 3 = 0$
- $(u-3)(u-1) = 0$
- $u_1 = 3 \Rightarrow 9^x = 3 \Rightarrow (3^2)^x = 3 \Rightarrow 3^{2x} = 3 \Rightarrow x = 0.5$
- $u_2 = 1 \Rightarrow 9^x = 1 \Rightarrow x = 0$
- $\mathbf{L} = \{0, 0.5\}$

c) $3^x + 18 \cdot 3^{-x} = -9$

- $3^x + \frac{18}{3^x} = -9 \mid u = 3^x$
- $u + \frac{18}{u} = -9$
- $u^2 + 18 = -9u$
- $u^2 + 9u + 18 = 0$
- $(u+3)(u+6) = 0$
- $u_1 = -3 \Rightarrow 3^x = -3 \Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösung
- $u_2 = -6 \Rightarrow 3^x = -6 \Rightarrow$ Die Gleichung hat keine Lösung
- $\mathbf{L} = \{\}$

10. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch ? Begründe Deine Entscheidung.

- a) $2^{500} < 8^{167} \Rightarrow 2^{500} < (2^3)^{167} \Rightarrow 2^{500} < 2^{501} \Rightarrow$ Die Aussage ist wahr
- b) $2^{1000} < 10^{300} \Rightarrow (2^{10})^{100} < (10^3)^{100} \Rightarrow 1024^{100} < 1000^{100} \Rightarrow$ Die Aussage ist falsch
- c) $10^{-100} = 100^{-50} \Rightarrow 10^{-100} = (10^2)^{-50} \Rightarrow 10^{-100} = 10^{-100} \Rightarrow$ Die Aussage ist wahr
- d) $(-3^4)^3 = (-3^3)^4 \Rightarrow -3^{12} = 3^{12} \Rightarrow$ Die Aussage ist falsch
- e) $2^{-10} < 30^{-2} \Rightarrow (2^5)^{-2} < 30^{-2} \Rightarrow (32)^{-2} < 30^{-2} \Rightarrow \frac{1}{32^2} < \frac{1}{30^2}$ Die Aussage ist wahr

11. Forme so um, dass im Schlussergebnis nicht mehr weiter zusammengefasst werden kann und dass keine Klammern und keine negativen Exponenten vorkommen.

- a) $(1+x^{-3})^2 = 1 + 2x^{-3} + x^{-6} = 1 + \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6}$
- b) $(x+x^{-1})^3 = (x+x^{-1})^2(x+x^{-1}) = (x^2+2+x^{-2})(x+x^{-1}) = x^3+x+2x+2x^{-1}+x^{-1}+x^{-3} = x^3+3x+3x^{-1}+x^{-3} = x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}$
- c) $(x^4+2x^{-1})^3 = (x^4+2x^{-1})^2(x^4+2x^{-1}) = (x^8+4x^3+4x^{-2})(x^4+2x^{-1}) = x^{12}+2x^7+4x^7+8x^2+4x^2+8x^{-3} = x^{12}+6x^7+12x^2+8x^{-3} = x^{12}+6x^7+12x^2+\frac{8}{x^3}$