

# Repetition quadratische Funktionen (oder Funktionen 2.Grades)

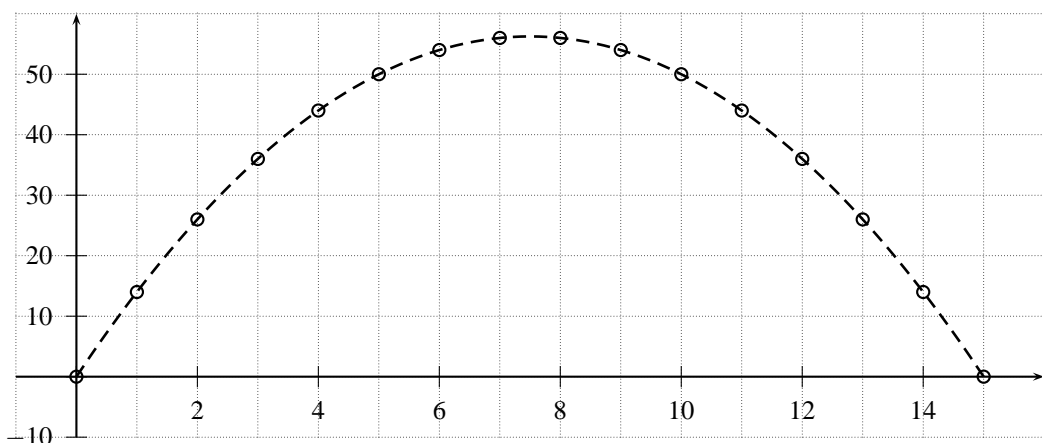
- Ich kenne die Definition einer quadratischen Funktion.  
→ Wenn die Vorschrift die Form  $f(x) = ax^2 + bx + c$  oder  $y = ax^2 + bx + c$  hat, wobei  $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ,  $b, c \in \mathbf{R}$ .
- Ich weiss, warum die Zahlenbereiche für  $a, b$  und  $c$  gerade so gewählt wurden.  
→ Es soll ein  $x^2$  in der Vorschrift vorkommen, deshalb darf  $a$  nicht 0 sein.
- Ich kenne die Bedeutung der Parameter  $a$  und  $c$ . →  $a$  steht für die Richtung und Grösse der Öffnung,  $c$  steht für die Schnitthöhe mit der  $y$ -Achse.
- Ich kann den Graphen einer Funktion 2.Grades zeichnen, z.B.: bei der Funktion  $y = -x^2 + 2x + 3$
- Ich weiss, wie der Graph einer quadratischen Funktion heisst und wie er aussieht.  
→ Der Graph heisst Parabel, er ist gekrümmt, Achsensymmetrisch und hat einen Scheitelpunkt.
- Ich kenne die Scheitelpunktsform einer quadratischen Funktion.  
→ z.B.  $f(x) = (x - 3)^2 + 2$ . Der Scheitelpunkt liegt in  $S(3|2)$ .
- Ich kann Extremwertaufgaben lösen, deren Zielfunktion eine Funktion 2.Grades ist.

**Beispiel:** Berechne die Seitenlängen des Rechtecks vom Umfang  $U = 30$  cm, das den grössten Flächeninhalt besitzt.

- Zunächst einmal überzeugen wir uns davon, dass verschiedene Längen und Breiten zu verschiedenen Flächeninhalten führen:

$l$ in cm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$b$ in cm	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Fläche	0	14	26	36	44	50	54	56	56	54	50	44	36	26	14	0

- Wir tragen alle Flächeninhalte ins untenstehende Koordinatensystem ein:



- Mit Ablesen erkennen wir, dass der maximale Flächeninhalt bei  $x = 7.5$  cm erreicht wird.

Wie können wir diesen Wert berechnen ?

- $x$ : Länge,  $y$ : Breite
- Zielfunktion:  $F(x, y) = xy$

- Nebenbedingung:  $U = 2x + 2y = 30 \Rightarrow x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x$
- $F(x, y) = xy = x(15 - x)$
- $F(x) = x(15 - x)$  ist eine Funktion 2. Grades. Die  $x$ -Koordinate Ihres Scheitelpunktes ist die gesuchte Breite.
- $x(15 - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 15$
- $S_x = \frac{0+15}{2} = 7.5$
- $y = 15 - x = 7.5$
- Der Flächeninhalt ist maximal, wenn  $x = 7.5$  und  $y = 7.5$ .

## Übungen

1. Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen. Drei konkrete Punkte des Graphen müssen sichtbar sein.
  - a)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 4$
  - b)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 2x - 3$
  - c)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x^2 + 3x - 2$
2. **Berechne** bei den obenstehenden Funktionen die Nullstellen und den Scheitelpunkt. Überprüfe anschliessend Dein Ergebnis durch Ablesen am Graphen.
3. Die Parabel mit der Gleichung  $y = x^2 + bx + c$  geht durch die Punkte  $P(3|5)$  und  $Q = (7|10)$ . Berechne die Parameter  $b$  und  $c$ .  
[ $b = -8.75, c = 22.25$ ]
4. Ein Kugelstösser stösst eine Kugel. Die Flugbahn der Kugel lässt sich mit der folgenden Funktionsvorschrift beschreiben:

$$H(x) = -\frac{1}{35}x^2 + 0.5x + 1.5, \quad x: \text{Stelle am Boden}, H(x): \text{Höhe der Kugel.}$$

- a) An welcher Stelle erreichte die Kugel die maximale Höhe und welche Höhe erreichte die Kugel an dieser Stelle ?  
[8.75 m, 3.69 m]
- b) Wie weit wurde die Kugel gestossen ?  
[20.11 m]
5. Gegeben ist die Funktion 2. Grades  $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ . Für welche Werte von  $x$  gilt:  $f(x) \geq 1$  ?  
[ $L = [-0.73, 2.73]$ ]
6. Bestimme den Scheitelpunkt der folgenden quadratischen Funktionen.
  - a)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = (x + 2)^2 - 5$  [(-2| -5)]
  - b)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = (x - 3)^2 + 1$  [(3|1)]
7. Gib eine quadratische Funktion an, deren Scheitelpunkt in
  - a) (3|5) liegt.
  - b) (-2| -4) liegt.
8. Gib eine Funktionsvorschrift an, deren Parabel
  - a) die  $y$ -Achse an der Stelle 4 schneidet.
  - b) nach oben geöffnet ist.
  - c) genau 1 Nullstelle hat.
  - d) 2 Nullstellen hat.
  - e) keine Nullstellen hat.
  - f) den Scheitelpunkt  $S = (3|4)$  hat.
9. Gegeben ist der Graph der Funktion  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 3x - 4$ . Der Graph wird nun gespiegelt. Wie lautet die neue Vorschrift, wenn wir den Graphen
  - a) an der  $x$ -Achse spiegeln ?  
[ $-(x + 1.5)^2 + 6.25$ ]

- b) an der  $y$ -Achse spiegeln ?  $[(x-1.5)^2 - 6.25]$   
c) am Scheitelpunkt spiegeln ?  $[-(x+1.5)^2 - 6.25]$
10. Die Summe zweier positiver Zahlen sei 9. Bestimme darunter diejenigen Zahlen, deren Produkt am grössten ist. [4.5 und 4.5]
11. Die Summe aller Kanten einer quadratischen Säule (Quader mit quadratischer Grundfläche) misst 24cm. Berechne die Kanten so, dass die Oberfläche maximal wird. [ $a = b = c = 2\text{cm}$ ]
12. Ein Zaun von 50m Länge soll einen rechteckigen Platz, der an eine Mauer grenzt, auf drei Seiten begrenzen. Welchen Flächeninhalt kann der Platz maximal haben ? [ $312.5\text{m}^2$ ]
13. Eine ebene 400m-Bahn soll so angelegt werden, dass sie ein Rechteck mit zwei angesetzten Halbkreisen begrenzt. Wie gross muss der Radius  $r$  sein und wie lang ist ein gerades Stück zwischen den Kurven, wenn
- a) das Rechteck maximalen Flächeninhalt haben soll ? [100m, 31.83m]  
b) das ganze Oval maximalen Flächeninhalt haben soll ? [0m, 63.66m]
14. Ein Kino hat bei einem Eintrittspreis von Fr.12 durchschnittlich 240 BesucherInnen. Würde man den Eintrittspreis um Fr. 1.-,2.-,3.-,usw. erhöhen, so ginge die Besucherzahl um 10,20,30,usw. Personen zurück. Bei welchem Eintrittspreis sind die Einnahmen am grössten ?
15. (Zusatz) Mit einem Faden der Länge  $u$  soll der Umfang eines Kreissektors gebildet werden. Für welchen Radius wird die Sektorfläche maximal und wie gross ist dann der Zentriwinkel ?
16. (Zusatz) Finde den Scheitelpunkt der Funktion  $f$  mit der Vorschrift  $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$  mit Hilfe von quadratischer Ergänzung.