2.3 Potenzen
(Thema aus dem Bereichen Algebra)

Inhaltsverzeichnis

1 Repetition: Potenzen mit natürlichen Exponenten

Definition 1 *Das Produkt von gleichen Termen wird folgendermassen zusammengefasst:*

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n-mal} = a^n$$

Wir erhalten sofort das erste Potenzgesetz:

Satz 1 *$m, n \in \boldsymbol{N}$, $a \in \boldsymbol{R}$. Dann gilt:*

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m} \text{ (R1)}}$$

Beweis

- $a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{n-mal} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{m-mal} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{(n+m)-mal} = a^{n+m}$

Weiter gilt:

Satz 2 *$m, n \in \boldsymbol{N}$, $n > m$, $a \in \boldsymbol{R}$. Dann gilt:*

$$\boxed{a^n : a^m = a^{n-m} \text{ (R2)}}$$

Beweis

- $a^n : a^m = \dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}^{n-mal}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot .... \cdot a}_{m-mal}} = a^{n-m}$

Das dritte Gesetz:

Satz 3 *$m, n \in \boldsymbol{N}$, $a \in \boldsymbol{R}$. Dann gilt:*

$$\boxed{(a^n)^m = a^{n \cdot m} \text{ (R3)}}$$

Beweis

- $(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot a^n \cdot .... \cdot a^n}_{m-mal} = a^{\overbrace{n+n+n+...+n}^{m-mal}} = a^{m \cdot n}$

Es folgen noch zwei Potenzgesetze zu Potenzen mit gleicher Basis.

Satz 4 *$n \in \boldsymbol{N}$, $a, b \in \boldsymbol{R}$. Dann gilt:*

$$\boxed{a^n \cdot b^n = (ab)^n \text{ (R4)}}$$

Beweis

- $a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots . \cdot a}_{n-mal} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots . \cdot b}_{n-mal} = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n-mal} = (ab)^n$

Satz 5 *$n \in \boldsymbol{N}$, $a, b \in \boldsymbol{R}$. Dann gilt:*

$$\boxed{a^n : b^n = (a : b)^n \quad \text{(R5)}}$$

Beweis

- $a^n : b^n = \dfrac{a^n}{b^n} = \dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots . \cdot a}^{n-mal}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \ldots . \cdot b}_{n-mal}} = \underbrace{\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \dfrac{a}{b}}_{n-mal} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = (a : b)^n$

Übungen

1. Schreibe als Potenz der Form a^b.

   a) $2^{12} \cdot 2^{25} =$ b) $a^{12} \cdot a^3 =$
   c) $x^5 \cdot x =$ d) $(x+1)^3 \cdot (x+1)^9 =$
   e) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}^4 \cdot \sqrt{5}^7 =$ f) $x^{2n+1} \cdot x^{11-n} =$
   g) $5^{12} : 5^9 =$ h) $\sqrt{2}^{40} : \sqrt{2}^6 =$
   i) $a^{2n} : a^{2n-1} =$ j) $(a+b)^7 : (a+b)^4 =$

   $[2^{37}, a^{15}, x^6, (x+1)^{12}, 5^6, x^{n+12}, 5^3, 2^{17}, a, (a+b)^3]$

2. Schreibe als Potenz der Form a^b.

   a) $15^3 \cdot 2^3 =$ b) $0.01^6 \cdot 1000^6 =$
   c) $\sqrt{12}^3 \cdot \sqrt{3}^3 =$ d) $\left(\sqrt{5}+1\right)^4 \left(\sqrt{5}-1\right)^4 =$
   e) $6^9 : 3^9 =$ f) $\sqrt{8}^7 : \sqrt{2}^7 =$
   g) $(4abc)^n : (2ac)^n =$

   $[30^3, 10^6, 6^3, 4^4, 2^9, 2^7, (2b)^n]$

3. Schreibe als Potenz der Form a^b.

   a) $(a^3)^8 =$ b) $(x^6)^6 =$
   c) $(x^2)^{n+1}$ d) $(n^n)^n$

   $[a^{24}, x^{36}, x^{2n+2}, n^{n^2}]$

4. Schreibe so um, dass im Schlussergebnis nur ein Exponent und keine Klammer vorkommt.

   a) $(-a^4)^3 =$ b) $((-a)^4)^3 =$

   $[-a^{12}, a^{12}]$

5. Schreibe als Dezimalzahl. Die Variable n steht jeweils für eine natürliche Zahl.

   a) $(-1) \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^5 =$ b) $(-1)^{4n}$
   c) $\left(\dfrac{x-1}{1-x}\right)^{2n} =$

$[-1, 1, 1]$

6. Finde mit Hilfe der Potenzgesetze heraus: Welche(r) Zahl/Term muss für x eingesetzt werden, damit die Gleichung erfüllt ist ?

   a) $3^6 \cdot 3^2 = 3^n$ b) $9 \cdot 2^7 + 7 \cdot 2^7 = 2^n$

   c) $5 \cdot 5^{20} + 20 \cdot 5^{20} = 5^n$ d) $2^{a+4} - 8 \cdot 2^a = 2^x$

   e) $\left(5^3\right)^4 : \left(5^2\right)^5 = 5^x$ f) $\left(100^{100}\right)^{100} = 10^x$

   $[8, 11, 22, a+3, 2, 20000]$

7. Entscheide, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind und begründe Deine Entscheidung.

   a) $2^{500} < 8^{167}$ [r] b) $2^{1000} < 10^{300}$ [f]

   c) $4.5 \cdot 10^{55} \cdot 4 \cdot 10^{54} < 10^{100}$ [f] d) $0.5 \cdot 10^{155} \cdot 4 \cdot 10^{154} = \left(3 \cdot 10^{77}\right)^2$ [r]

   e) $\left(2^{99}\right)^{101} = \left(2^{101}\right)^{99}$ [r] f) $\left(5^5\right)^5 = 5^{\left(5^5\right)}$ [f]

8. Berechne ohne TR: Wieviele Sekunden benötigt ein Lichtstrahl von der Sonne zur Erde, wenn die (mittlere) Entfernung der Erde von der Sonne $1.5 \cdot 10^{11}$ m und die Lichtgeschwindigkeit $3 \cdot 10^8$ m/s betragen ? [500 s]

9. Aus wievielen Ziffern besteht die Zahl

   a) 100^{100} ? [201] b) 1000^{1000} ? [3001]

10. Beantworte mit ja oder nein und begründe: Ist 2^{18}

    a) eine Quadratzahl ? b) eine Kubikzahl ?

2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Wir haben die Potenzgesetze bis jetzt erst für die natürlichen Zahlen definiert. Wir haben allerdings den Anspruch, ein Gesetz so weitreichend wie möglich zu formulieren, d.h. die Zahlenbereiche so weit wie möglich auszudehnen.

Wenn wir den Bereich nur schon auf ganze Zahlen ausdehnen treten sofort Potenzen mit negativen Exponenten auf, wie z.B. $3^{-4}, 2^{-1}$, usw. Da 0 auch eine ganze Zahl ist, können auch Potenzen der Form $3^0, 2^0$, usw. auftreten. Wir müssen uns also mit der Frage beschäftigen: Wie gehen wir mit diesen Exponenten um ?

Frage: $3^{-2} = ?$

- Der naheliegendste Weg: $3^4 : 3^6 = \dfrac{3^4}{3^6} = \dfrac{1}{3^2} \left(= \dfrac{1}{9} \right)$
- Das Potenzgesetz würde liefern: $3^4 : 3^6 = 3^{4-6} = 3^{-2}$

Wir schreiben bewusst: Das Potenzgesetz **würde** liefern. Wir haben die Division von Potenzen nur für den Fall behandelt, dass $n > m$ ist, eben um keine negativen Exponenten zu erhalten. Einerseits ist $3^4 : 3^6 = \frac{1}{3^2}$, andererseits $= 3^{-2}$. Wenn das Potenzgesetz ausgedehnt werden soll, müssen wir definieren:

Definition 2 *$a \in \boldsymbol{R} \backslash \{0\}$, $n \in \boldsymbol{N}$. Dann legen wir fest:*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Jetzt noch der Exponent 0.

Frage: $3^4 : 3^4 = ?$

- Der naheliegendste Weg: $3^4 : 3^4 = \frac{3^4}{3^4} = 1$
- Das Potenzgesetz würde liefern: $3^4 : 3^4 = 3^{4-4} = 3^0$

Definition 3 *$a \in \boldsymbol{R} \backslash \{0\}$. Dann definieren wir:*

$$a^0 = 1$$

Wir können unsere Regeln erweitern:

Satz 6 *Es seien $a \in \boldsymbol{R}, b \in \boldsymbol{R} \backslash \{0\}; z_1, z_2 \in \boldsymbol{Z}$. Dann gilt:*

$$\boxed{\begin{array}{c} a^{z_1} \cdot a^{z_2} = a^{z_1+z_2} \ \text{(R1)} \\ a^{z_1} : a^{z_2} = a^{z_1-z_2} \ \text{(R2)} \\ (a^{z_1})^{z_2} = a^{z_1 \cdot z_2} \ \text{(R3)} \\ a^{z_1} \cdot b^{z_1} = (ab)^{z_1} \ \text{(R4)} \\ a^{z_1} : b^{z_1} = (a:b)^{z_1} \ \text{(R5)} \end{array}}$$

Die Sätze lassen sich mit den gleichen Ideen wie die Sätze 1-5 beweisen, jedoch aufwendiger. Wir verzichten an dieser Stelle auf diese Beweise.

Übungen

11. Schreibe als gewöhnlichen Bruch oder, wenn möglich, als ganze Zahl.

 a) $2^{-3} =$ b) $3^{-2} =$

 c) $-2^{-3} =$ d) $(-2)^{-2} =$

 e) $(-3)^{-3} =$ f) $3^0 =$

 g) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} =$ h) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} =$

 $[\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{27}, 1, 8, 9]$

12. Schreibe als Potenz mit einer möglichst kleinen natürlichen Zahl als Basis und einem Exponenten aus **Z**.

 a) $\frac{1}{9} =$ b) $\frac{1}{7} =$

 $[3^{-2}, 7^{-1}]$

13. Gib die Wissenschaftliche Darstellung der Zahl an. Ein Beispiel: $0.00745 = 7.45 \cdot 10^{-3}$

 a) 0.91 = b) 0.0669 =

 c) 0.00000013456 = d) $25.27 \cdot 10^{-7} =$

 e) $0.099 \cdot 10^{-12} =$ f) $0.0055 \cdot 10^{-6} =$

 g) $909.09 \cdot 10^{-4} =$ h) $0.0000032 \cdot 10^{4} =$

[$9.1\cdot 10^{-1}, 6.69\cdot 10^{-2}, 1.3456\cdot 10^{-7}, 2.527\cdot 10^{-6}, 9.9\cdot 10^{-14}, 5.5\cdot 10^{-9}, 9.0909\cdot 10^{-2}, 3.2\cdot 10^{-2}$]

14. Ordne die Zahlen $3^{-3}, 10^{-3}, 2^{-4}, 2^{-10}, 10^{-2}, 3^{-2}$ nach aufsteigender Grösse.

[$2^{-4} < 10^{-3} < 10^{-2} < 3^{-3} < 2^{-4} < 3^{-2}$]

15. Berechne für $x = -2, -3$

a) $27\cdot 3^x$

b) $2^x + 2^{-x}$

[$3, 1, 4.25, 8.125$]

16. Das Produkt aller Zahlen jeder Zeile, jeder Spalte und beider Diagonalen ist gleich 2^{14}. Fülle die Tabelle aus.

2^{11}	2^{-2}		2^8
2^0			2^3
		2^2	2^7
2^{-1}	2^{10}		

[$2^{-3}, 2^5, 2^6, 2^4, 2, 2^9, 2^{-4}$]

17. Bringe die folgenden Terme auf die Form a^b.

a) $2^5\cdot 2^{-8} =$

b) $5^{-4}\cdot 5^{-6} =$

c) $3^{-6}\cdot 3^6 =$

d) $a^{-3}\cdot a^n =$

e) $2^{n+3}\cdot 2^{-3} =$

f) $x^{-n}\cdot x^{-n} =$

g) $4^5 : 4^{-1} =$

h) $5^{-4} : 5^{-3} =$

i) $a^n : a^{n-1} =$

j) $d^3 : d^{-n} =$

[$2^{-3}, 5^{-10}, 1, a^{n-3}, 2^n, x^{-2n}, 4^6, 5^{-1}, a, d^{n+3}$]

18. Bringe die folgenden Terme auf die Form a^b.

a) $\left(3^{-2}\right)^{-3} =$

b) $\left(6^{-2}\right)^3 =$

c) $\left(5^3\right)^{-2} =$

d) $\left(7^0\right)^{-7} =$

e) $\left(a^{-2}\right)^n =$

f) $\left(b^{-n}\right)^{-2} =$

g) $\left(c^2\right)^{n-1} =$

h) $\left(d^{3n}\right)^{-2} =$

[$3^6, 6^{-6}, 5^{-6}, 1, a^{-2n}, b^{2n}, c^{2n-2}, d^{-6n}$]

19. Forme so um, dass im Schlussergebnis keine Klammer und nur ein Exponent vorkommt.

a) $\left(-10^4\right)^5 =$

b) $\left((-10)^4\right)^5 =$

c) $\left(-10^5\right)^{-4} =$

d) $\left((-10)^{-5}\right)^{-4} =$

[$-10^{20}, 10^{20}, 10^{-20}, 10^{20}$]

20. Bringe die folgenden Terme auf die Form a^b.

a) $4^{-6}\cdot 2.5^{-6} =$

b) $5^{-10}\cdot 1.4^{-10}x^{-10} =$

c) $12^{-x} : 6^{-x} =$

d) $18^{-2n} : 6^{-2n} =$

[$10^{-6}, (7x)^{-10}, 2^{-x}, 3^{-2n}$]

21. Forme so um, dass im Schlussergebnis nicht mehr weiter zusammenfasst werden kann und dass keine Klammern und keine negativen Exponenten vorkommen.

a) $(4a^{-3} \cdot 5a^2) : 10a^3 =$ b) $(10a^{-3} + 4a^{-2}) \cdot 2a^3 =$

c) $(10a^{-3} + 4a^{-2}) : 2a^3 =$ d) $(10a^{-3} : 5a^{-2}) \cdot 2a^3 =$

e) $(10a^{-3} : 5a^{-2}) : 2a^3 =$ f) $(a^{2n+1} \cdot a^{-n}) : a^2 =$

g) $(a^{2n+1} : a^{2n-1}) : a^2 =$

$[\frac{2}{a^4}, 8a + 20, \frac{5}{a^6} + \frac{2}{a^5}, 4a^2, \frac{1}{a^4}, a^{n-1}, 1]$

22. Schreibe als gewöhnlichen Bruch.

a) $\left(\frac{x}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{x}{6}\right)^{-2} =$ $[\frac{1}{4}]$ b) $\left(\frac{x}{2}\right)^{-4} : \left(\frac{x}{6}\right)^{-4} =$ $[\frac{1}{81}]$

23. Schreibe als Dezimalzahl. Begründe jeden einzelnen Schritt mit einer Potenregel oder einer Definition.

a) $(a-b)^{10} : (b-a)^{10} =$ [1] b) $(a-b)^7 \cdot (b-a)^{-7} =$ [-1]

24. Forme so um, dass im Schlussergebnis nicht mehr weiter zusammengefasst werden kann und dass keine Klammern und keine negativen Exponenten vorkommen.

a) $(1 + x^{-3})^2 =$ b) $(x + x^{-1})^3 =$

c) $(x^4 + 2x^{-1})^3 =$

$[\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^6} + 1, x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}, x^{12} + 6x^7 + 12x^2 + \frac{8}{x^3}]$

25. Entscheide, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Begründe Deine Entscheidung !

a) $9^{1.5} \in \mathbf{N}$ [w] b) $5^{1.5} < 11$ [f]

c) $0.5^{0.5} > 0.5$ [w] d) $\pi^{100} < 9^{50}$ [f]

e) $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{2}$ [f] f) $27^{\frac{2}{3}} + 64^{\frac{2}{3}} = 125^{\frac{2}{3}}$ [w]

g) $16^{0.75} \in \mathbf{R}$ [f] h) $\left(2 + \frac{2}{3}\right)^{0.5} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0.5}$ [w]

i) $\left(2 + \frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{3}}$ [w]

26. Löse die Gleichung $x^{\frac{3}{4}} = 10$ in $\mathbf{R}$ mit Hilfe des TR (ohne solve-Befehl). Gib die ersten 4 Ziffern der Lösung an. [21.54]

27. Löse die untenstehenden Gleichungen in $\mathbf{R}$ mit Hilfe der Potenzgesetze und nicht mit ausprobieren.

a) $x^5 = 2^5$ b) $x^6 = 16^3$

c) $x^4 = 2^{-4}$ d) $x^3 = -8$

e) $x^5 = -2^{10}$ f) $x^{-5} = -2^{10}$

$[2, \pm 4, \pm 0.5, -2, -4, -0.25]$

28. Löse die untenstehenden Gleichungen in $\mathbf{R}$.

a) $2^x = 2^{-5}$ b) $\frac{1}{64} = 2^x$

c) $2^{-12} \cdot 2^{-x} = 2^6$ d) $(2^2)^x = 1$

e) $2^{(2^x)} = 2$ f) $2^{(x^2)} = 2$

g) $(2^x)^2 = \frac{1}{16}$ h) $2^x = 0.5$

i) $2^6 = 2^{4x-2}$ j) $10^{5x-2.5} = 10^{4x-1}$

k) $3^{4x} = 9^{x+5}$ l) $0.1^x = 1000$

m) $5^{x+2} \cdot 25^{-x} = 125$ n) $4 \cdot 2^x \cdot 32 = 4^x$

$[-5, -6, -18, 0, 0, \pm 1, -2, -1, 2, 1.5, 5, -3, -1, 7]$

29. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch ? Begründe Deine Entscheidung.

 a) $10^{-100} = 100^{-50}$ [w] b) $(-3^4)^3 = (-3^3)^4$ [f]

 c) $2^{-10} < 30^{-2}$ [w]

30. Die Kante eines sehr kleinen Würfels misst 10^{-4} mm. Berechne dessen Oberfläche S und dessen Volumen V. Gib Dein Ergebnis in der Form $a \cdot 10^b$ an. $[6 \cdot 10^{-8}\,\text{mm}^2, 10^{-12}\,\text{mm}^3]$

31. Das Volumen eines Würfels beträgt $2.7 \cdot 10^{-11}\,\text{m}^3$. Berechne ohne TR die Würfelkante k. $[3 \cdot 10^{-4}\,\text{m}]$

32. Gegeben sind das Volumen $V_P = 4 \cdot 10^{-45}\,\text{m}^3$ eines Protons, das Volumen $V_E = 10^{21}\,\text{m}^3$ der Erde und das Volumen $V_U = 4 \cdot 10^{78}\,\text{m}^3$ des Universums.

 a) Wie oft ist das Volumen des Protons in demjenigen der Erde enthalten ? $[2.5 \cdot 10^{65}]$

 b) Wie oft ist das Volumen des Protons in demjenigen des Universums enthalten ? $[10^{123}]$

 c) Wie oft ist das Volumen der Erde in demjenigen des Universums enthalten ? $[10^{57}]$

33. Ein 10^{-4} m dickes Papier hat eine Fläche von $1\,\text{km}^2$. Es soll, wenigstens in Gedanken, 41 mal so gefaltet werden, dass sich die Dicke bei jeder Faltung verdoppelt. Berechne die Höhe des so entstandenen Papierturmes in km. $[\approx 2.2 \cdot 10^5\,\text{km}]$

34. Ein Würfel mit 1 cm Kantenlänge soll vollständig mit Protonen ($V_P = 4 \cdot 10^{-45}\,\text{m}^3, m_p = 1.7 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$) gefüllt werden. Berechne ohne TR: Wie gross ist dann die Masse dieses Würfels (Hinweis $1.7 \cdot 2.5 = 4.25$) ? $[4.25 \cdot 10^{11}\,\text{kg}]$

3 Potenzen mit rationalen Exponenten

Wir können nun schon mit recht vielen Potenzen umgehen, nebst denen mit natürlichen Exponenten haben wir auch negative ganzzahlige Exponenten und den Exponenten 0 im Griff. Im Sinne der Erweiterung drängt sich die Frage auf: Gibt es auch Potenzen mit rationalen Exponenten, bzw. macht es Sinn, solche zu definieren ?

Wir repetieren noch einmal kurz die Wurzelausdrücke:

- $\sqrt{64} = 8$, weil $8 \cdot 8 = 64$
- $\sqrt[3]{64} = 4$, weil $4^3 = 64$

Die allgemeine Definition für die Wurzel lautet:

Definition 4 *Für $a \in \boldsymbol{R}_0^+$ und $n \in \boldsymbol{N}$*

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Übungen

35. Berechne ohne Verwendung eines TR.

a) $\sqrt[3]{1000} =$

b) $\sqrt{\frac{16}{81}} =$

$[10, \frac{4}{9}]$

Frage: Welchen Exponenten sollen wir der Wurzel zuordnen, welcher Exponent macht Sinn (z.B. bei $\sqrt{2} = 2^{?}$) ?

Überlegung:

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 = 2^1$
- $2^x \cdot 2^x = 2^1 \Rightarrow 2^{2x} = 2^1 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
- Wenn die Potenzgesetze auch für Wurzelausdrücke gelten sollen, erhalten wir: $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$
- Nehmen wir noch ein zweites Beispiel:
- $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{4} = 4 = 2^1$
- $4^x \cdot 4^x \cdot 4^x = 4^1 \Rightarrow 4^{3x} = 4^1 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$
- Wenn wir davon ausgehen, dass die Potenzgesetze auch für Wurzelausdrücke gelten sollen, erhalten wir: $\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$

Allgemein definieren wir:

Definition 5 *Für $a \in \boldsymbol{R}_0^+$ und $n \in \boldsymbol{N}$ definieren wir:*

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Es folgt bereits die nächste Frage.

Frage: Welchen Exponenten sollen wir z.B. dem Wurzelausdruck $\sqrt[3]{a^2}$ zuordnen ?

Überlegung:

- $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^2$
- $a^x \cdot a^x \cdot a^x = a^{3x}$
- Einerseits erhalten wir a^2, mit dem Potenzgesetz erhalten wir a^{3x}. Gleichsetzen ergibt: $2 = 3x \Rightarrow x = \frac{2}{3}$. Wir setzen also $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

Allgemein:

Definition 6 *Es sei $a \in \boldsymbol{R}_0^+; m, n \in \boldsymbol{N}$. Dann definieren wir:*

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Wir erweitern unsere Definition für negative Exponenten:

Definition 7 *Es sei $a \in \boldsymbol{R}^+; m,n \in \boldsymbol{N}$. Dann definieren wir:*

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Übungen

36. Berechne ohne Verwendung der Wurzelfunktion des TR.

a) $49^{\frac{1}{2}}$
b) $27^{\frac{1}{3}}$
c) $10000^{\frac{1}{4}}$
d) $64^{-\frac{1}{3}}$
e) $1.44^{\frac{1}{2}} =$
f) $0.125^{\frac{1}{3}} =$

$[7, 3, 10, 0.25, 1.2, 0.5]$

37. Berechne ohne Verwendung der Wurzelfunktion des TR.

a) $8^{\frac{2}{3}} =$
b) $32^{-\frac{2}{5}} =$
c) $121^{1.5} =$
d) $125^{\frac{4}{3}} =$

$[4, 0.25, 1331, 625]$

38. Ordne die Potenzen $64, 64^0, 64^{-1}, 64^1, 64^{1.5}, 64^{-1.5}$ ohne Hilfe des TR nach aufsteigender Grösse. Überprüfe Dein Ergebnis mit dem TR.

Mit den oben getroffenen Definitionen können die Potenzgesetze noch einmal erweitert werden, nämlich auf den Zahlenbereich der rationalen Zahlen.

Satz 7 *(2.Erweiterung der Potenzregeln). $a \in \boldsymbol{R}_0^+, b \in \boldsymbol{R}^+$, $q_1, q_2 \in \boldsymbol{Q}$.*

$$\boxed{\begin{array}{c} a^{q_1} \cdot a^{q_2} = a^{q_1+q_2} \ \text{(R1)} \\ a^{q_1} : a^{q_2} = a^{q_1-q_2} \ \text{(R2)} \\ (a^{q_1})^{q_2} = a^{q_1 \cdot q_2} \ \text{(R3)} \\ a^{q_1} \cdot b^{q_1} = (ab)^{q_1} \ \text{(R4)} \\ a^{q_1} : b^{q_1} = (a:b)^{q_1} \ \text{(R5)} \end{array}}$$

Übungen

39. Schreibe als Potenz mit rationalem Exponenten bzw. als ganze Zahl wenn möglich.

a) $10^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{\frac{1}{6}} =$
b) $7^{1.4} \cdot 7^{1.5} \cdot 7^{0.6} =$
c) $2^{\frac{9}{4}} \cdot 2^{\frac{9}{5}} =$
d) $5^{0.2} \cdot 5^{-0.5} =$
e) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2} =$
f) $\sqrt[4]{\sqrt{5}-1} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{5}+1} =$
g) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} =$
h) $4^{\frac{2}{3}} \cdot 16^{\frac{2}{3}} =$
i) $5^{\frac{3}{4}} \cdot 10^{\frac{3}{4}} =$
j) $5^{-0.5} \cdot 20^{-0.5} =$
k) $\sqrt[3]{120} : \sqrt[3]{15} =$
l) $\sqrt[4]{50} : \sqrt[4]{2} =$

$[10^{\frac{1}{2}}, 7^{\frac{7}{2}}, 2^{\frac{81}{20}}, 5^{-\frac{3}{10}}, 2^{\frac{8}{15}}, 2^{\frac{1}{2}}, 2, 16, 50^{\frac{3}{4}}, 0.1, 2, 5^{\frac{1}{2}}]$

40. Berechne ohne TR. Schreibe Dein Ergebnis als Potenz mit rationalem Exponenten bzw. als Zahl wenn möglich.

a) $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^6 =$ b) $\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^4 =$

c) $\left(10^{\frac{3}{4}}\right)^2 =$ d) $\left(10^2\right)^{\frac{2}{3}} =$

$[625, 3^{-2}, 10^{\frac{3}{2}}, 10^{\frac{4}{3}}]$

41. Berechne ohne TR. Schreibe Dein Ergebnis als Potenz mit rationalem Exponenten bzw. als Zahl wenn möglich.

a) $5^{\frac{1}{6}} : 5^{\frac{1}{7}} =$ b) $\left(a^{\frac{3}{4}} : a^{\frac{2}{3}}\right) : a =$

c) $\sqrt[3]{2} : \sqrt[5]{2} =$ d) $\left(\sqrt[8]{5^3} \cdot \sqrt[5]{5^6}\right) : \sqrt[40]{5} =$

$[5^{\frac{1}{42}}, a^{-\frac{11}{12}}, 2^{\frac{2}{15}}, 5^{\frac{31}{20}}]$

42. Ermittle mit Hilfe der Potenzregeln und ohne TR die Lösungmenge der untenstehenden Gleichungen in $\mathbf{R}$.

a) $x^{-2.5} = 3^{2.5}$ b) $x^{0.2} = 2$

c) $x^{-0.5} = 7$ d) $x^4 = 10^{-4}$

e) $x^{0.75} = 8$ f) $x^{0.8} = \frac{1}{16}$

$[\frac{1}{3}, 32, \frac{1}{49}, \pm 0.1, 16, \pm\frac{1}{32}]$

43. Ermittle mit Hilfe der Potenzregeln und ohne TR die Lösungmenge der untenstehenden Gleichungen in $\mathbf{R}$.

a) $9^x = 3$ b) $8^x = 4$

c) $1000^x = 0.1$ d) $8^{-0.25} = 2^x$

$[0.5, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -0.75]$

44. Ermittle die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen in $\mathbf{R}$ mit Überlegen oder Probieren.

a) $x^0 = 0$ b) $0^x = 0$

$[\{\}, \mathbf{R}^+]$

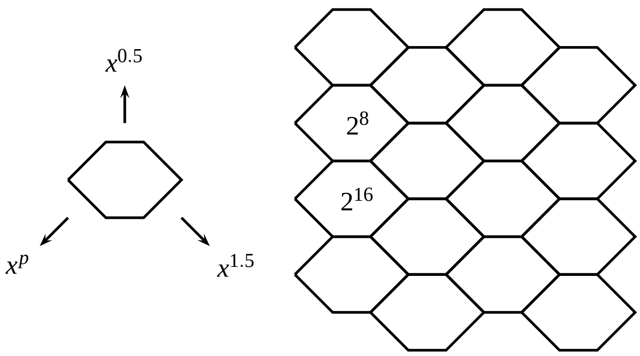
45. Ermittle die Lösungsmenge der untenstehenden Gleichung, indem Du die Gleichung mit Hilfe der Substitution in eine Gleichung 2.Grades überführst.

a) $4 \cdot 2^x + 32 = (2^x)^2$ b) $4 \cdot 2^x + 32 = 4^x$

c) $9^{2x} + 3 = 4 \cdot 9^x$ d) $3^x + 18 \cdot 3^{-x} = -9$

$[\mathbf{L} = \{3\}, \mathbf{L} = \{3\}, \mathbf{L} = \{0, 0.5\}, \mathbf{L} = \{\}]$

46. Fülle die Zelle der Wabe nach folgender Regel aus und berechne p. $[p = 4/3]$



47. Schreibe als Potenz mit rationalem Exponenten. Überprüfe Dein Ergebnis anschliessend mit der TR.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{2}} =$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}} =$

c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} =$

d) $\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}}} =$

$[2^{\frac{1}{6}}, 2^{\frac{1}{12}}, 2^{\frac{7}{8}}, 2^{-\frac{1}{6}}]$

Wir definieren den prozentualen Fehler eines Ergebnisses E_F folgendermassen (E_E bezeichnet das exakte Ergebnis):

$$F_{pr} = \frac{|E_F - E_E|}{E_E}$$

48. Ein Schüler erhält $3.6 \cdot 10^{4.9}$ als Resultat seiner Berechnungen. Er rundet es und schreibt $3.6 \cdot 10^5$ hin. Wie gross ist

a) der absolute Fehler (Differenz) ? $[\approx 74042]$

b) der prozentuale Fehler ? $[\approx 25.89\%]$

49. Wie gross ist der prozentuale Fehler, wenn ein Resultat von

a) $10^{78.7}$ auf 10^{79} gerundet wird ?

b) $10^{45.95}$ auf 10^{46} gerundet wird ?

c) $10^{24.05}$ auf 10^{24} gerundet wird ?

$[\approx 99.53\%, \approx 12.20\%, \approx 10.87\%]$