2.1 Gleichungen 2.Grades mit einer Unbekannten

(Thema aus dem Bereich Algebra)

Inhaltsverzeichnis

1 Definition der Gleichung 2.Grades mit einer Unbekannten

Beispiele von Gleichungen 2.Grades:

- $3x^2 + 4x - 2 = 0$
- $3x^2 + 4x - 2 = -x$
- $3x^2 - 2 = 0$
- $2x^2 + 2x - 3 = x^2$
- $(x-2)^2 + 3x = 0$
- $x^3 + x^2 + x + 1 = x^3$

Folgende Gleichungen sind keine Gleichungen 2.Grades:

- $x^2 - 4x = x^2$ (Gleichung 1.Grades)
- $x^3 + x^2 = 0$ (Gleichung 3.Grades)
- $4\sqrt{x} - 2 = 0$ (Wurzelgleichung)

Definition 1 *Eine Gleichung heisst **Gleichung 2.Grades** mit einer Unbekannten, wenn sie durch Äquivalenzumformungen auf folgende Form gebracht werden kann:*

Übungen

1. Überprüfe, ob es sich bei den folgenden Gleichungen um Gleichungen 2.Grades handelt. Bestimme gegebenenfalls die Parameter a, b und c.

   a) $x^2(x+1) = 0$ b) $x^2 + 2x + 1 = x^2$ c) $(x+1)(x-2) = 2x^2$

2 1.Spezialfall: Die Gleichung lässt sich faktorisieren

Gleichungen mit Faktoren, deren Produkt 0 ist, lassen sich besonders einfach lösen. Zur Repetition der Begriffe Faktoren und Produkt:

$$3 \cdot 4 = 12$$

$$a \cdot b = 0$$

Es gilt folgender Satz (der Pfeil $\Rightarrow$ bedeutet: „daraus folgt “):

Satz 1 *Wenn beim Produkt $a \cdot b$ mindestens ein Faktor 0 ist, dann hat das Produkt den Wert 0, d.h.*

Beispiele

- $3 \cdot 0 = 0$
- $0 \cdot 4 = 0$
- $3 \cdot 0 \cdot (8-x)(25+x^3) = 0$
- $2^{100} \cdot 0 \cdot 9z = 0$

Es gilt auch die Umkehrung des Satzes.

Satz 2 *Wenn das Produkt $a \cdot b$ den Wert 0 hat, dann ist mindestens einer der Faktoren 0, d.h.*

Beispiel

- $(x-1)(x-3) = 0$

Übungen

2. Finde die Lösung(en) der folgenden Gleichungen in $\mathbf{Q}$. Gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L}$ = {...} an.

   a) $7777(2x-37) = 0$ b) $1234(444-10x) = 0$

   c) $x(12x+96) = 0$ d) $35x(7x+91) = 0$

   $[\mathbf{L} = \{18.5\}, \mathbf{L} = \{44.4\}, \mathbf{L} = \{-8,0\}, \mathbf{L} = \{-13,0\}]$

3. Finde die Lösung(en) der folgenden Gleichungen in $\mathbf{Q}$. Gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L}$ = {...} an.

   a) $(x-6)(2x+9) = 0$ b) $(5x-2)(4x+3) = 0$

   c) $(120-8x)(12+8x) = 0$ d) $(x+2.5)(5x-2) = 0$

   e) $x(x-9)(2x+13)(3x-15) = 0$ f) $(5x+7)(6x-90)(9x+60) = 0$

   g) $(4x+3+7x)(15-7x-1) = 0$ h) $x(3x+17-20x)(25+7x+3) = 0$

[$\mathbf{L} = \{-4.5, 6\}, \mathbf{L} = \{0.4, -0.75\}, \mathbf{L} = \{-1.5, 15\}, \mathbf{L} = \{-2.5, 0.4\}, \mathbf{L} = \{-6.5, 0, 5, 9\}, \mathbf{L} = \{-6.\bar{6}, -1.4, 15\}$]
[$\mathbf{L} = \{-3/11, 2\}, \mathbf{L} = \{-4, 0, 1\}$]

4. Finde die Lösung(en) der folgenden Gleichungen in **Q**. Gib Dein Ergebnis in der Form **L** = {...} an.

a) $x^2 + 4x + 4 = 0$
b) $x^2 + 9x + 20 = 0$
c) $x^2 - 9 = 0$
d) $x^2 - 2x + 1$
e) $x^2 - 5x + 6 = 0$
f) $x^2 - 9x + 20 = 0$
g) $x^2 - x - 20 = 0$
h) $x^2 - 5x - 24 = 0$
i) $x^2 - 2x = 63$
j) $x^2 = 5x + 14$

[$\mathbf{L} = \{-2\}, \mathbf{L} = \{-4, -5\}, \mathbf{L} = \{-3, 3\}, \mathbf{L} = \{1\}, \mathbf{L} = \{2, 3\}, \mathbf{L} = \{4, 5\}, \mathbf{L} = \{-4, 5\}, \mathbf{L} = \{-3, 8\}, \mathbf{L} = \{-7, 9\}, \mathbf{L} = \{-2, 7\}$]

3 2.Spezialfall: Wurzel ziehen

Bei der zweiten Methode können wir nach x auflösen, indem wir die Wurzel ziehen. Ein Beispiel:

$$(x-2)^2 - 3 = 0$$

Übungen

5. Finde die Lösung(en) der folgenden Gleichungen 2.Grades in den reellen Zahlen.

a) $9u^2 - 100 = 4u^2$ [$\mathbf{L} = \{\pm\sqrt{20}\}$]
b) $(11-z)^2 + 22z = 125$ [$\mathbf{L} = \{\pm 2\}$]
c) $(x-4)^2 - 144 = 0$ [$\mathbf{L} = \{-8, 16\}$]
d) $(x+1)^2 = 0$ [$\mathbf{L} = \{-1\}$]
e) $(x-2)^2 + 3 = 0$ [$\mathbf{L} = \{\}$]
f) $x^2 + 6x = -9$ [$\mathbf{L} = \{-3\}$]

4 Allgemeine Gleichung 2.Grades

4.1 Einschub: Zerlegen von Wurzeln

In den folgenden Abschnitten werden wir in den Endergebnissen immer wieder Wurzelausdrücke antreffen. Ähnlich wie wir bei Brüchen soweit wie möglich kürzen, wollen wir die Wurzeln soweit wie möglich zerlegen.

Beispiel

- $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- $\sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$

6. Zerlege die folgenden Wurzeln soweit wie möglich.

   a) $\sqrt{75}$ b) $\sqrt{27}$ c) $\sqrt{72}$

   $[5\sqrt{5}, 3\sqrt{3}, 6\sqrt{2}]$

4.2 Wir lösen eine Gleichung 2.Grades mit quadratischem Ergänzen

Wir suchen die Lösung der folgenden Gleichung:

$$x^2 + 6x + 2 = 0$$

Problem: Weder die Methode des Faktorisierens noch die Methode des Wurzelziehens hilft uns hier weiter.

Wir brauchen eine neue Methode, diejenige des **quadratischen Ergänzens**. Die Idee dahinter: Wir versuchen, die Gleichung auf eine Form zu bringen, wie wir sie z.B. bei Aufgabe 5c) angetroffen haben. Dazu müssen wir den x^2- und x-Term in die Klammer $()^2$ „verpacken “.

Lösungsweg:

Übungen

7. Fülle die untenstehenden Lücken aus.

   a) $x^2 + 4x + \ldots = (x + \ldots)^2$ b) $u^2 - 6u + \ldots = (u - \ldots)^2$ c) $y^2 - \frac{2}{3}y + \ldots = (y - \ldots)^2$

8. Finde die Lösungen der folgenden Gleichungen ohne TR. Gib Dein Ergebnis in der Form **L** = {...} an. Überprüfe anschliessend bei (a) Deine Lösung.

a) $x^2+6x+7=0$ $[\mathbf{L}=\{-3\pm\sqrt{2}\}]$ b) $x^2+16x+3=0$ $[\mathbf{L}=\{-8\pm\sqrt{61}\}]$

c) $2x^2+x-10=0$ $[\mathbf{L}=\{-2.5,2\}]$ d) $x^2+x+1=0$ $[\mathbf{L}=\{\}]$

4.3 Die Lösungsformel

Die Lösungsformel können wir jetzt mit quadratischem Ergänzen herleiten:

Übungen

9. Berechne die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel. Gib Deine Lösung(en) als Dezimalzahl in der Form **L** = {...} an.

   a) $2x^2-7x+3=0$ $[\mathbf{L}=\{0.5,3\}]$ b) $4x^2+5x-6=0$ $[\mathbf{L}=\{-2,0.75\}]$

   c) $-2x^2+x+6=0$ $[\mathbf{L}=\{2,-1.5\}]$ d) $5x^2+8x=4$ $[\mathbf{L}=\{-2,0.4\}]$

10. Berechne die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel. Gib Deine Lösung(en) exakt (d.h. in Wurzelform, wobei die Wurzel so weit wie möglich zerlegt werden soll) in der Form **L** = {...} an.

   a) $x^2-6x+4=0$ $[\mathbf{L}=\{3\pm\sqrt{5}\}]$ b) $-x^2+2x+1=0$ $[\mathbf{L}=\{1\pm\sqrt{2}\}]$

c) $4x^2 - 4x - 7 = 0$ $[\mathbf{L} = \{0.5 \pm \sqrt{2}\}]$ d) $\sqrt{2}x^2 + x - \sqrt{2} = 0$ $[\mathbf{L} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}/2\}]$

11. Berechne die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel. Gib Deine Lösung(en) in der Form **L** = {...} an.

    a) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0$ $[\mathbf{L} = \{-1, 1/3\}]$ b) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = 0$ $[\mathbf{L} = \{1.5, 6\}]$

12. Die Gleichung $2x^2 + x - 1 = 0$ hat zwei Lösungen. Stelle eine Gleichung auf, deren Lösungen um 5 grösser sind und bringe das Ergebnis auf die Form $ax^2 + bx + c = 0$ wobei die Parameter a, b und c ganze Zahlen sein sollen. $[2x^2 - 19x + 44 = 0]$

5 Anzahl Lösungen einer Gleichung 2.Grades.

13. Wie viele Elemente hat die Lösungsmenge ?

    a) $x^2 + 100x + 1 = 0$ b) $2x^2 - x + 3 = 0$

    c) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ d) $16x^2 + 25x + 10 = 0$

    [2,0,1,2]

14. Für welchen Wert des Parameters hat die Gleichung genau eine Lösung ?

    a) $2x^2 - 3x + a = 0$ b) $x^2 + bx + b + 3 = 0$

    c) $bx^2 + bx + 1 = 8x$

    $[a = 1.125, b_1 = -2, b_2 = 6; b_1 = 4, b_2 = 16]$

15. Für welche Werte des Parameters hat die Gleichung $x^2 + 2x + 3a = 0$ genau 2 Lösungen? $[a < 1/3]$

6 Biquadratische Gleichungen

6.1 Definition

Definition 2 *Eine Gleichung heisst biquadratisch, wenn sie durch Äquivalenzumformungen auf folgende Form gebracht werden kann:*

Beispiele

- $x^4 + x^2 + 1 = 0$
- $3x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

6.2 Wie ermittle ich die Lösungsmenge einer biquadratischen Gleichung ?

Beispiel

$x^4 + 3x^2 - 3$

Übungen

16. Löse die folgenden Gleichungen mit Hilfe einer geeigneten Substitution (ersetzen). Gib Dein Ergebnis in der Form **L** = {...} an.

    a) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ $[\mathbf{L} = \{\pm\sqrt{2}, \pm 3\}]$ b) $x^4 + 8 = 9x^2$ $[\mathbf{L} = \{\pm 2\sqrt{2}, \pm 1\}]$

17. Löse die folgenden Gleichungen mit Hilfe einer geeigneten Substitution. Gib Dein Ergebnis in der Form **L** = {...} an.

    a) $x^6 + 61x^3 - 8000 = 0$ $[\mathbf{L} = \{-5, 4\}]$ b) $x^8 + 17x^4 + 16 = 0$ $[\mathbf{L} = \{\}]$

18. Löse die folgenden Gleichungen mit Hilfe einer geeigneten Substitution (Term ersetzen durch einen einfacheren Term). Gib Dein Ergebnis in der Form **L** = {...} an.

    a) $(x-10)^2-8(x-10)+15=0$ [$\mathbf{L}=\{13,15\}$] b) $(x+4)^2-12(x+4)+34=0$ [$\mathbf{L}=\{2\pm\sqrt{2}\}$]

7 Textaufgaben, die auf Gleichungen 2.Grades führen.

19. Von zwei reellen Zahlen ist eine um 50 grösser als die andere und das Produkt um 50 grösser als die Summe. Bestimme die beiden Zahlen. [2 und 52 oder -50 und 0]

20. Das Produkt der beiden kleinsten von sechs aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist dreimal so gross wie die Summe der vier übrigen Zahlen. Berechne die kleinste Zahl. [-3 oder 14]

21. Welche Zahlen unterscheiden sich um 0.24 von ihrer Quadratzahl (z.B. ist die Quadratzahl von 4 die Zahl 16) ? [-0.2,0.4,0.6,1.2]

22. Eine Schulklasse fährt mit einem Autocar ins Skilager. Die Fahrtkosten von 300 Franken werden gleichmässig unter den Teilnehmern aufgeteilt. Da ein Schüler krankheitshalber nicht mitfahren kann, ist der Kostenanteil für die übrigen Teilnehmer um 50 Rappen grösser. Wie viele sind mitgefahren ? [24]

23. Ein Blumenbeet von 3 m Länge und 2 m Breite ist ringsum mit konstanter Breite von Rasen eingefasst, sodass Einfassung und Beet gleichen Flächeninhalt haben. Wie breit ist die Einfassung ? [5 dm]

24. Der Umfang eines Rechtecks misst 25 m, der Flächeninhalt 25 m^2. Berechne die Seiten. [10 m und 2.5 m]

25. Jemand verkauft eine Uhr für Fr. 144.- und gewinnt dabei so viele Prozente, wie die Uhr Franken gekostet hat beim Ankauf. Wie viele Prozente sind es ? [80%]