1.7 Stereometrie

Inhaltsverzeichnis

1 Repetition

1.1 Der Satz von Pythagoras

Der Satz von Pythagoras gilt nur bei rechtwinkligen Dreiecken (c ist die Hypothenuse):

$a^2 + b^2 = c^2$

1. Berechne bei einem gleichseitigen Dreieck die Höhe h und den Flächeninhalt A, wenn
   a) die Seitenlänge a des Dreiecks 10 cm beträgt.
   b) die Seitenlänge a beträgt.

1.2 Die Trigonometrischen Funktionen

Wir haben drei trigonometrische Funktionen kennengelernt (sin,cos und tan). Dabei gilt:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{GK}{H}\\ \cos(\alpha) &= \frac{AK}{H}\\ \tan(\alpha) &= \frac{GK}{AK}\end{aligned}$$

2. Berechne bei den folgenden rechtwinkligen Dreiecken jeweils die übrigen Seiten und Winkel:
   a) $a = 3\,\text{cm}$ und $\beta = 50°$ b) $b = 5\,\text{cm}$ und $\beta = 40°$

1.3 Masseinheiten

Längeneinheiten	Flächeneinheiten	Volumeneinheiten
1 mm	1 mm^2	1 mm^3
1 cm = ... mm	1 cm^2 = ... mm^2	1 cm^3 = ... mm^3
1 dm = ... cm	1 dm^2 = ... cm^2	1 dm^3 = ... cm^3 = ...l
1 m = ... dm	1 m^2 = ... dm^2	1 m^3 = ... dm^3
	1a = ... m^2	
	1ha = ...a	
1 km = ... m	1 km^2 = ... m^2 = ...ha	1 km^3 = ... m^3

1.4 Dichte

Die Formel für die Dichte lautet:

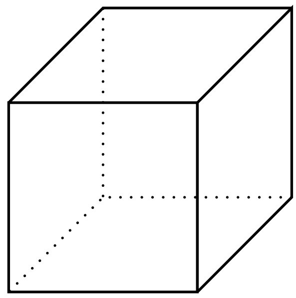
$$\rho = \frac{m}{V}$$

wobei m für die Masse steht, V für das Volumen und ρ für die Dichte.

3. Welche Dichte hat ein Körper mit einem Volumen von $3\,\mathrm{m}^3$ und einer Masse von $300\,\mathrm{kg}$?
4. Welche Masse hat ein Körper mit einem Volumen von $10\,\mathrm{dm}^3$ und einer Dichte von $40\,\mathrm{kg}/\,\mathrm{dm}^3$?

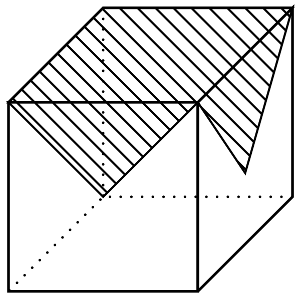
2 Der Würfel

Ein Würfel besitzt 8 Eckpunkte, 12 Kanten von gleicher Länge, dazu besteht seine Oberfläche aus 6 Quadraten.

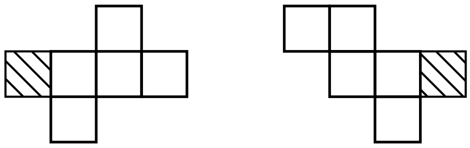


Übungen

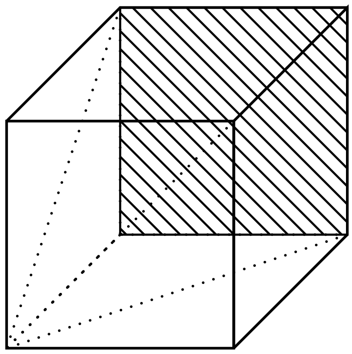
5. Berechne bei einem Würfel mit der Kantenlänge $k = 5\,\mathrm{cm}$
   a) die Flächendiagonale d.
   b) die Raumdiagonale D.
6. Berechne bei einem Würfel mit der Kantenlänge k
   a) die Flächendiagonale in Abhängigkeit von k.
   b) die Raumdiagonale in Abhängigkeit von k.
7. Wir betrachten einen würfelförmigen Tisch (Kantenlänge k), auf welchem ein quadratisches Tischtuch liegt, dessen Ecken genau in die Mittelpunkte der 4 Seitenflächen fallen. Wie gross ist der Flächeninhalt des Tischtuches ?



8. Nun wird der Würfel aus der Aufgabe 5 samt dem Tischtuch aufgeschnitten und in ein Würfelnetz zerlegt. Die ursprüngliche Deckfläche mit dem Tischtuch ist nach wie vor grau eingefärbt. Wo aber befinden sich nun die vier dreieckigen Tischtuch-Eckteile ? Zeichne diese in den nachstehenden Würfelnetzen an der richtigen Stelle und in der richtigen Lage ein.



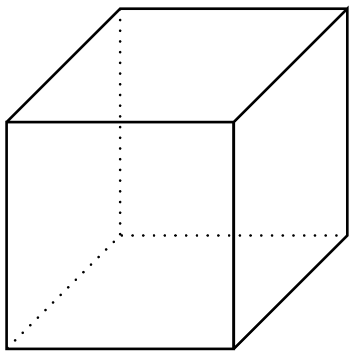
9. Einen Würfel der Kantenlänge $k = 8\,\text{cm}$ kann man in schiefe Pyramiden zerteilen. Eine solche schiefe Pyramide ist im nebenstehenden Würfel eingezeichnet.



   a) Berechne die Summe K der acht Kanten dieser Pyramide (Zusatz: bei allgemeiner Kantenlänge k).

   b) Wie gross ist die Oberfläche A einer solchen schiefen Pyramide in unserem Würfel (Zusatz: bei allgemeiner Kantenlänge k) ?

10. Stelle Dir in unserem Würfel eine gerade Pyramide vor, und zwar so, dass eine der Seitenflächen des Würfels ihre Grundfläche bildet und dass ihre Spitze im Würfelzentrum liegt. Zeichne eine solche Pyramide in den untenstehenden Würfel möglichst anschaulich und farbig hinein. Beachte dabei, dass man die Lage des Würfelzentrums konstruieren kann, indem man die Raumdiagonalen im Würfel zeichnet. Welches Volumen V besitzt eine solche Pyramide in einem Würfel der Kantenlänge k ?



11. Welche Masse hat ein Bleiwürfel (Dichte $\rho = 11.34\,\text{kg}/\,\text{dm}^3$) mit $k = 10\,\text{cm}$?

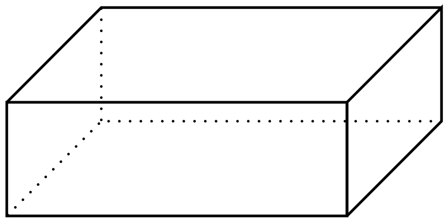
12. Welchen Winkel

   a) α bilden in einem Würfel Raumdiagonale und Würfelkante ?

   b) β bilden Raumdiagonale und Seitendiagonale ?

3 Der Quader

Ein Quader besitzt 8 Eckpunkte und 12 Kanten. Seine Oberfläche besteht aus 6 Rechtecken, wobei je zwei Rechtecke kongruent sind. Der Quader wird charakterisiert durch die Länge l, die Breite b und die Höhe h.



13. Fülle folgende Tabelle aus (die Masse beziehen sich auf einen Quader):

a	b	c	V	O
4.2 cm	5.5 m	2.5 dm		
7.8 cm	1.5 cm		35.1 cm^3	
	2.5 cm	3.6 dm	31.5 dm^3	
2.4 dm	0.40 m			25.6 dm^2
		6.0 dm	216 dm^3	228 dm^2
	1.0 cm		2.0 cm^3	10.0 cm^2

14. Ein Quader hat folgende Masse: $l = 5\,\text{cm}, b = 8\,\text{cm}$ und $c = 6\,\text{cm}$. Berechne seine Raumdiagonale D

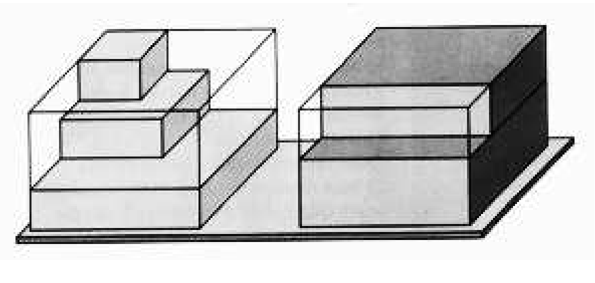
15. Ein Quader habe eine Länge von 12 cm, eine Breite von 8 cm und eine Höhe von 4 cm.
    a) Wieviele Würfel mit einer Kantenlänge von 1 cm könnte man in diesem Quader unterbringen ?
    b) Wieviele Würfel mit einer Kantenlänge von 2 cm könnte man in diesem Quader unterbringen ?

16. Ein quaderförmiger Blechbehälter mit $a = 32\,\text{cm}$, $b = 15\,\text{cm}$ und $c = 41\,\text{cm}$ ist oben offen und besteht aus 1 mm starkem Stahlblech (Dichte $\rho = 7.8\,\text{kg}/\,\text{dm}^3$). Berechne:
    a) Wieviel Liter Wasser fasst der Behälter ?
    b) Wie lang ist eine Raumdiagonale ?
    c) Wie gross ist die Masse des Behälters ?

17. Ein Granitquader, der 3.5 m lang und je 90 cm breit und hoch ist, wird so ausgehölt, dass an den Seiten und unten eine 15 cm dicke Wand stehen bleibt. Welche Masse hat der Hohlkörper, wenn Granit die Dichte $2.8\,\text{g}/\,\text{cm}^3$ besitzt ?

18. a) Die drei Quader auf der linken Seite sind gleich hoch, doch ist Länge und Breite bei jedem Quader um k% kleiner als beim darunter liegenden. Bestimme k so, dass die drei Quader 7/12 des Volumens des umschliessenden Quaders besitzen.

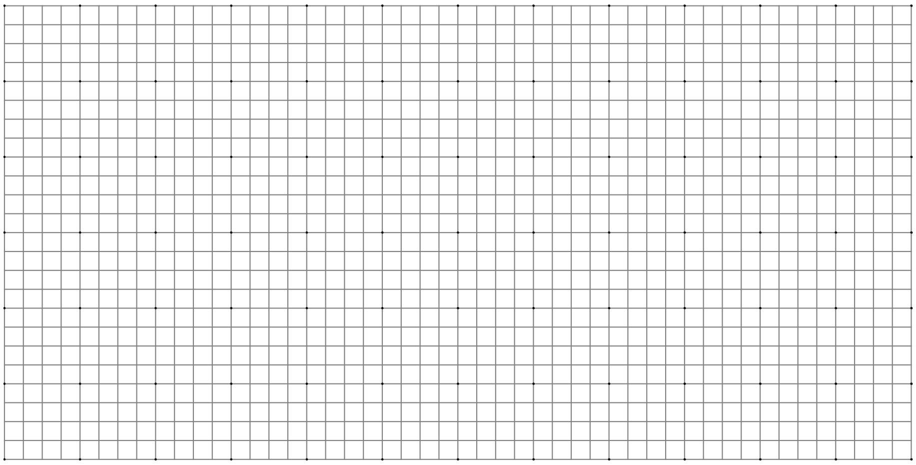
    b) Die beiden Quader auf der rechten Seite sind gleich breit, jedoch sind Länge und Höhe beim oberen Quader um k% kleiner als beim unteren Quader. Bestimme k so, dass die beiden Quader 85% des Volumens des umschliessenden Quaders besitzen.



4 Das Prisma

4.1 Was ist ein Prisma ?

Beispiele von Prismen:



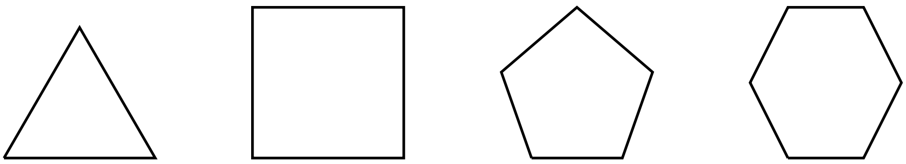
Bemerkung:

- Quader und Würfel sind Spezialfälle des Prismas.
- Z.B. ist die Schachtel einer Tobleroneschokolade ein Prisma.

Prismen sind Körper, die man sich durch Verschieben eines Vielecks im Raum entstanden denken kann. Es besteht aus 2 kongruenten Vielecken (Grundflächen) und mehreren Parallelogrammen als Seitenflächen. Der Abstand der Grundflächen heisst die Höhe des Prismas, die Seitenflächen bilden seinen Mantel.

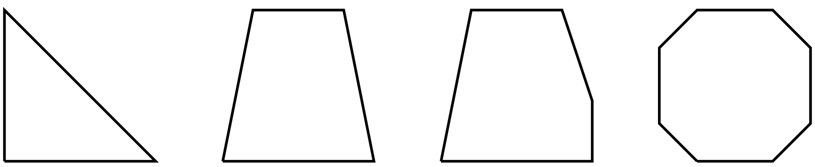
Kurz ein paar Vielecke:

Zuerst ein paar Vielecke bei denen jede Kante gleich lange ist (regelmässige Vielecke):



regelmässiges 3-Eck regelmässiges 4-Eck regelmässiges 5-Eck regelmässiges 6-Eck

Ein paar weitere Vielecke, die aber keine regelmässigen Vielecke sind:



3-Eck 4-Eck 5-Eck 8-Eck

4.2 Die Volumenformel für das Prisma

Die Volumenformel für ein Prisma mit der Grundfläche G und der Höhe h ist uns bekannt:

$$V = G \cdot h$$

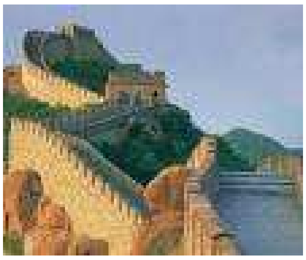
Die Formel kann folgendermassen begründet werden:

- 1.Begründung: Wir können das Prisma so zerschneiden, dass wir aus den entstandenen Teilen einen Quader mit der Grundfläche G und der Höhe h zusammenbasteln können.

- 2.Begründung: Wir können uns das Prisma annähernd als einen Stapel Karten vorstellen, wobei eine Karte kongruent zur Grundfläche G ist. Je dünner die Karten sind, umso besser kann das Prisma angenähert werden.

Übungen

19. Ein senkrechtes Prisma mit der Höhe $h = 10\,\text{cm}$ hat gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $a = 8\,\text{cm}$ als Grundseiten. Berechne das Volumen dieses Prismas.



20. Die chinesische Mauer ist 3460 km lang, ihr Querschnitt ist ein durchschnittlich 8 m hohes Trapez, das oben 6 m und unten 7.5 m breit ist.

    a) Welches Volumen hat die Mauer ?

    b) Wie hoch könnte man mit dem zu Staub zermahlenen Baumaterial der Mauer die Schweiz bedecken, deren Fläche ca. $42000\,\text{km}^2$ beträgt ?

21. Der Giebel eines Hauses ist ein gleichschenkliges Dreieck mit 8.0 m langer Grundseite und 3.5 m Höhe. Die Höhe vom Erdboden bis zur Grundseite des Giebeldreiecks beträgt 5.2 m, die Länge des Hauses beträgt 10 m.

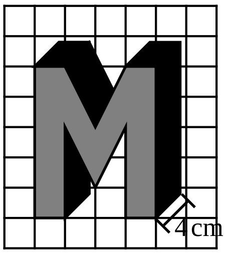
    a) Wie gross ist das Volumen des Hauses ?

    b) Was kostet das Dach, wenn $1\,\text{m}^2$ Dachfläche 235 Fr kostet ?

22. Berechne die Masse des Buchstabens M (1 H. = 2 cm), wenn er

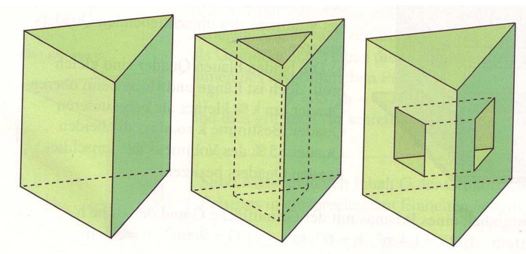
    a) massiv ist und aus Aluminium der Dichte $2.70\,\text{g}/\text{cm}^3$ besteht.

    b) innen hohl ist und aus Stahlblech der Dicke 1.50 mm und der Dichte $7.90\,\text{g}/cm^3$ besteht.



23. Ein senkrechtes Prisma mit der Höhe $h = 10\,\text{cm}$ hat gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $a = 10\,\text{cm}$ als Grundseiten.

    - Auf die Grundseiten wird ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 5\,\text{cm}$ eingezeichnet, wobei die Seiten parallel zu den ursprünglichen Seiten sind (2.Figur).
    - Auf zwei Mantelflächen (Quadrate) wird je ein Quadrat mit der Seitenlänge 10/3 eingezeichnet, dessen Seiten parallel zu denen der Mantelfläche sind (3.Figur) und der Abstand zum Rand des Prismas immer gleich ist.



5 Die Pyramide

5.1 Die Definition einer Pyramide

Verbindet man die Ecken eines ebenen Vielecks mit einem Punkt S ausserhalb des Vielecks, so erhält man eine Pyramide mit der Spitze S. Zwei Beispiele:

Ein Spezialfall stellt die n-seitige, regelmässige Pyramide dar. Ihre Grundfläche besteht aus einem regelmässigen n-Eck, ihre Spitze liegt über dem Mittelpunkt dieses n-Ecks. Zwei Beispiele:

5.2 Das Volumen einer Pyramide

Die Herleitung der Volumenformel für eine Pyramide ist ziemlich aufwendig und kompliziert, weshalb wir nicht näher darauf eingehen. Sie lautet:

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

Übungen

24. Berechne den Rauminhalt V einer Pyramide mit $G = 12.2\,\text{cm}^2$ und $h = 3.8\,\text{cm}$. [$15.45\,\text{cm}^3$]

25. Berechne für eine Pyramide die fehlende der drei Grössen G, h und V.

    a) $V = 34.5\,\text{cm}$, $h = 7.9\,\text{mm}$ [$131\,\text{cm}^2$] b) $V = 0.24\,\text{m}^3, G = 1.72\,\text{dm}^2$ [$419\,\text{dm}$]

26. Berechne für eine regelmässige vierseitige Pyramide mit der Höhe $h = 3.0\,\text{cm}$ und der Grundkante $a = 4.0\,\text{cm}$ die folgenden Grössen:

    a) Die Grundfläche G. [$16\,\text{cm}^2$]
    b) Das Volumen V. [$16\,\text{cm}^3$]
    c) Die Mantelfläche M. [$28.84\,\text{cm}^2$]
    d) Die Oberfläche O. [$44.84\,\text{cm}^2$]

27. Berechne für eine regelmässige dreiseitige Pyramide mit der Höhe $h = 3.0\,\text{cm}$ und der Grundkante $a = 4.0\,\text{cm}$ die folgenden Grössen:

    a) Die Grundfläche G. [$6.93\,\text{cm}^2$]
    b) Das Volumen V. [$6.93\,\text{cm}^3$]
    c) Die Höhe h_1 einer Seitenfläche. [$3.46\,\text{cm}$]
    d) Die Mantelfläche M. [$20.78\,\text{cm}^2$]
    e) Die Oberfläche O. [$27.71\,\text{cm}^2$]

28. Eine der berühmtesten Pyramiden (gebaut 2530 v.Chr.) ist die Cheopspyramide. Ihre ursprüngliche Höhe betrug $146.5\,\text{m}$, die Länge einer Grundseite der (annähernd) quadratischen Grundfläche betrug ca. $230\,\text{m}$.

    a) Berechne ihr Volumen, wenn die vorhandenen Hohlräume nicht berücksichtigt werden. [$2580000\,\text{m}^3$]
    b) Wie viele Kalksteinblöcke mit dem Volumen $1.1\,\text{m}^3$ benötigte man ? [$23450000\,\text{m}^3$]

6 Der Zylinder

Zylinder sind Körper, die man sich durch Verschieben eines Kreises im Raum entstanden denken kann. Erfolgt die Verschiebung senkrecht zum Kreis, erhalten wir einen geraden (oder senkrechten) Zylinder. Die Begriffe Grundfläche, Mantel und Höhe haben die entsprechende Bedeutung wie beim Prisma und der Pyramide.

Die Volumenformel für den geraden Zylinder ist offensichtlich die Grundfläche multipliziert mit der Höhe.

Das Volumen des schiefen Zylinders berechnen wir mit einem Näherungsverfahren. Wir können uns den Zylinder als ein regelmässiges Prisma mit „sehr vielen “Ecken vorstellen.

Weiter können wir dann auf die bereits vorhandene Volumenformel für das Prisma zurückgreifen, wo die Grundfläche mit der Höhe multipliziert wird.

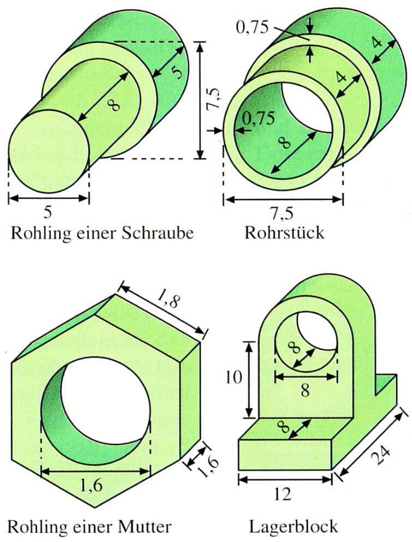
Die Grundfläche beim Zylinder ist die Fläche des Kreises mit Radius r, sie beträgt πr^2

Für einen beliebigen Zylinder gilt also:

$$V = \pi r^2 h$$

Übungen

29. Wie gross sind Mantel- und Oberfläche eines geraden Zylinders mit Radius r ? [$M = 2\pi r h, O = 2\pi r(r+h)$]
30. Berechne das Volumen V, die Mantelfläche M und die Oberfläche O eines senkrechten Zylinders mit $r = 3.5\,\text{cm}$ und $h = 5.2\,\text{cm}$. [$V \approx 200\,\text{cm}^3, M \approx 114.35\,\text{cm}^2, O \approx 191.32\,\text{cm}^2$]
31. Eine zylindrische Regentonne hat einen Durchmesser von 60 cm und ist 85 cm hoch. Wieviel l fasst die Tonne und wie hoch wäre der Wasserstand bei 150l Wasser ? [240.33ł, 53.05 cm]
32. Eine Rolle Eisendraht mit einer Dichte von $7.85\,\text{g}/\text{cm}^3$ hat eine Masse von 13.5 kg. Wie lang ist der 2.4 mm dicke Draht ? [380 m]
33. Berechne das Volumen und die Oberfläche der folgenden Körper.



7 Der Kegel

7.1 Die Definition eines Kegels

Verbindet man die Punkte eines Kreises mit einem nicht in der Kreisfläche liegenden Punkt S, so erhält man einen **Kegel** mit Spitze S. Höhe, Grundfläche und Mantel haben die gleiche Bedeutung wie bei den Prismen. Die Verbindungslinien von den Kreispunkten zu der Kegelspitze nennen wir **Mantellinien**. Ein Kegel heisst **senkrechter Kegel** (oder **gerader Kegel)**, wenn alle Mantellinien gleich lang sind.

zwei Beispiele

7.2 Das Volumen eines Kegels

Das Volumen eines Kegels können wir wieder mit einem Näherungsverfahren berechnen. Einen Kegel ist näherungsweise eine Pyramide, die ein regelmässiges Vieleck mit sehr vielen Ecken als Grundfläche hat. Wir können also die Volumenformel der Pyramide verwenden:

$$V = \frac{G \cdot h}{3}$$

Beim Kegel ist die Grundfläche G gerade die Kreisfläche, die sich mit $G = r^2\pi$ berechnet. Für das Volumen des Kegels erhalten wir also:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Die Mantelfläche M eines senkrechten Kegels mit Radius r und der Höhe h berechnen wir folgendermassen:

Übungen

34. Gib eine Formel für die Oberfläche O eines senkrechten Kegels mit dem Radius r, der Höhe h an. $[O = \pi r(r + \sqrt{r^2 + h^2})]$

35. Die Angaben in der untenstehenden Tabelle beziehen sich auf einen geraden Kreiskegel. Berechne die fehlenden Grössen:

r	h	s	V	G	M	O
	2.5 cm		$24\,\text{cm}^3$			
1.8 m			$3.2\,\text{m}^3$			

$[r \approx 3.03\,\text{cm}, s \approx 3.93\,\text{cm}, G \approx 28.84\,\text{cm}^2, M \approx 37.40\,\text{cm}^2, O \approx 66.24\,\text{cm}^2; h \approx 0.94\,\text{m}, s \approx 2.03\,\text{m}, G \approx 10.18\,\text{m}^2, M \approx 11.48\,\text{m}^2, O \approx 21.66\,\text{m}^2]$

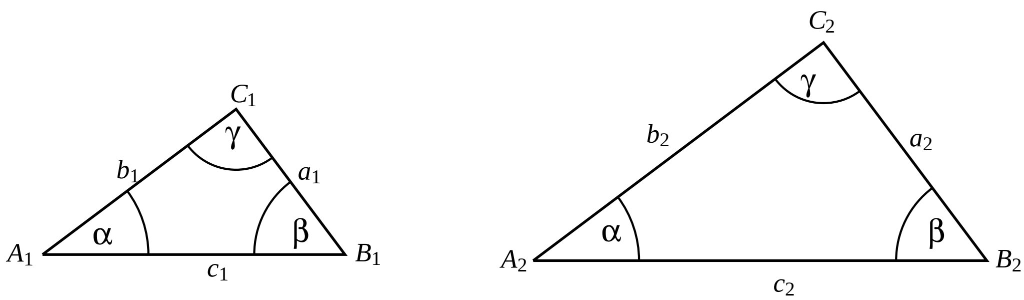
36. Ein runder Turm mit 15 m Umfang hat ein 6.5 m hohes Kegeldach. Bestimme die Fläche des Daches und das Volumen des Dachraumes. $[51.93\,\text{m}^2, 38.79\,\text{m}^3]$

37. Ein kegelförmiger Messbecher mit einer Höhe von 10 cm soll 0.60l fassen.
   a) Welchen Durchmesser muss die „Grundfläche “des Messbechers haben ? $[d \approx 15.14\,\text{cm}]$
   b) In welcher Höhe ist die 0.4l-Marke anzubringen ? $[h \approx 6.67\,\text{cm}]$

7.3 Der Kegelstumpf

Wir repetieren kurz die Strahlensätze, weil wir sie nachher brauchen.

Gegeben sind zwei Dreiecke A_1 und A_2 mit gleichen Winkeln, aber unterschiedlich langen Seiten.



Dann gilt:

$$\frac{a_1}{\ldots} = \frac{b_1}{\ldots} \qquad \frac{a_1}{\ldots} = \frac{c_1}{\ldots} \qquad \frac{b_1}{\ldots} = \frac{c_1}{\ldots}$$

Wird ein senkrechter (gerader) Kegel parallel zu seiner Grundfläche abgeschnitten, dann entsteht ein senkrechter (gerader) **Kegelstumpf**.

Beispiel

Frage: Wie gross ist das Volumen eines Kegelstumpfes ?

Überlegung:

Zwischen den Grössen r, R, h und H besteht folgender Zusammenhang:

Übungen

38. Berechne die Volumina und Oberflächen der folgenden Kegelstumpfe (Runde Dein Ergebnis auf zwei Stellen nach dem Komma):

    a) $R = 8.4\,\text{cm}, r = 3.2\,\text{cm}, h = 5\,\text{cm}$ $[V \approx 563\,\text{cm}^3, O \approx 516.73\,\text{cm}^2]$

    b) $r = 0.85\,\text{m}, h = 52\,\text{cm}, H = 1.2\,\text{m}$ $[V \approx 7.02\,\text{m}^3, O \approx 60.76\,\text{m}^2]$

39. Ein Korken (Dichte $0.24\,\text{g}/\text{cm}^3$) hat die Gestalt eines Kegelstumpfes mit $r = 12\,\text{mm}, R = 18\,\text{mm}$ und $h = 32\,\text{mm}$. Welche Masse haben 1000 Stück ? $[m \approx 5.5\,\text{kg}]$

8 Die Kugel

40. Berechne das Volumen V, die Mantelfläche M und die Oberfläche O eines senkrechten Zylinders mit $r = 3.5\,\text{cm}$ und $h = 5.2\,\text{cm}$.

41. Eine Plakatsäule ist 2.60 m hoch und hat einen Durchmesser von 1.20 m. Wie gross ist die beklebbare Fläche ?

42. Eine zylindrische Regentonne hat einen Durchmesser von 60 cm und ist 85 cm hoch. Wieviel l fasst die Tonne und wie hoch wäre der Wasserstand bei $150l$ Wasser ?

43. Eine Rolle Eisendraht mit einer Dichte von $7.85\,\text{g}/\text{cm}^3$ hat eine Masse von 13.5 kg. Wie lang ist der 2.4 mm dicke Draht ?

44. Berechne das Volumen und die Oberfläche der grünen Körper.