Thema aus dem Bereich Analysis -
1.3 Funktionen 1.Grades

Inhaltsverzeichnis

1 Checkliste

Die folgenden Fertigkeiten solltest Du am Schluss des Skriptes erworben haben. Beachte, dass es sich nur um die Bausteine handelt, mit denen Du alles lösen kannst. Die Handhabung der Bausteine erfordert intensive Beschäftigung mit den Übungen.

- Ich kenne die Begriffe Definitionsmenge, Bildmenge, Funktionsvorschrift, Argument und Funktionswert.
- Ich weiss, was ein Funktionsgraph ist und wie ich ihn zeichnen kann.
- Ich weiss, was eine Wertetabelle ist.
- Ich kenne die Definition einer Funktion 1.Grades.
- Ich weiss, welche Bedeutung die Parameter m und n haben.
- Ich kann eine durch zwei Punkte festgelegte Gerade mit einer Funktion 1.Grades beschreiben.
- Ich kann den Steigungswinkel einer Geraden bestimmen.

2 Einführung in den Funktionsbegriff

Wir haben zwei Mengen, eine „Ausgangsmenge "(**Definitionsmenge D**) und eine „Zielmenge "(**Bildmenge B**). Wir ordnen nun jedem Element der Ausgangsmenge genau ein Element aus der Bildmenge zu. Dies geschieht mit der sogenannten Funktionsvorschrift $f(x)$. Ein konkretes Beispiel:

Die Definitionsmenge und die Bildmenge sind die natürlichen Zahlen **N**. Die Funktionsvorschrift lautet $f(x) = 2x$, d.h. dem Element 1 wird das Element 2 zugeordnet, dem Element 2 das Element 4, usw. Die Zahl, die für x genommen wird, nennen wir **Argument**. Die Zahl, welche wir erhalten nach dem Einsetzen in die Vorschrift nennen wir **Funktionswert**. Z.B. hat das Argument 2 den Funktionswert 4.

Bem 1
In der Bildmenge muss nicht jedes Element getroffen werden, es dürfen Elemente übrigbleiben.

Weitere Beispiele von Funktionen:

- $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $f(x) = x^2$. Bei dieser Funktion wird jeder Zahl ihr Quadrat zugeordnet. Wenn wir den Wert 3 nehmen erhalten wir 9. Mathematisch geschrieben: $f(3) = 9$.
- $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x$. Bei dieser Funktion wird wiederum jeder Zahl das Doppelte zugeordnet. Beachte hier, dass es einen Unterschied gibt im Vergleich zum Einführungsbeispiel: Die Definitionsmenge besteht hier neu aus allen reellen Zahlen.

Übungen

1. Gegeben ist die Menge A = {die Menge aller Schüler der Klasse 1aF} und die Menge B = {die Menge aller Jahrgänge von 1970-2000}. Die Funktion f ordnet jedem Schüler seinen Jahrgang zu.
   a) Wie lauten Definitions- und Bildmenge ?
   b) Wie lautet $f(x)$ (Die Funktionsvorschrift) ?
   c) Wie lauten die Funktionwerte von Tiziana und Dominik ?
2. Wir haben eine Funktion $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = 3x$.
   a) Was passiert mit einem Element aus der Definitionsmenge, wenn die Funktionsvorschrift angewendet wird ?
   b) Wie lauten die Funktionswerte, wenn die Argumente 0,1 und -1 sind ?
3. Wie lautet die Vorschrift $f(x)$?
   a) Der Seitenlänge eines Quadrats (in cm) wird der Flächeninhalt des Quadrats zugeordnet.
   b) Der Kantenlänge eines Würfels wird das Volumen des Würfels zugeordnet.
   c) Dem Durchmesser eines Kreises wird der Umfang des Kreises zugeordnet.
   d) Einer Zahl wird das Fünffache der Quadratwurzel dieser Zahl zugeordnet.
   e) Einer Zahl wird ihr Kehrwert (z.B. ist von 2 der Kehrwert 1/2) zugeordnet.

3 Der Funktionsgraph und die Wertetabelle

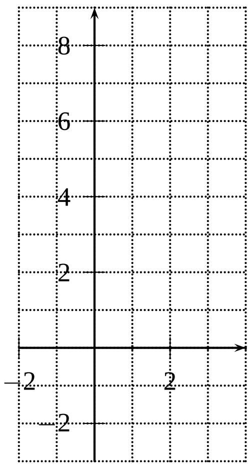
Einer gegebenen Funktion können wir nun einen Graphen zuordnen. Wir zeichnen die Graphen von zwei Funktionen, die wir oben schon betrachtet haben:

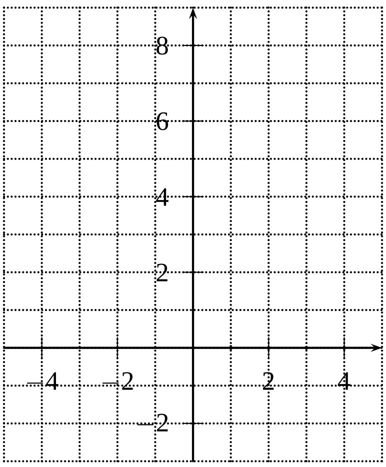
- $f_1 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = 2x$.
- $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2x$.

Der Graph der Funktion f_1 wird nun folgendermassen gezeichnet (s. linke Abbildung):

Wir gehen an die Stelle $x = 1$ auf der x-Achse. Wir setzen den Wert 1 in die Funktionsvorschrift ein und erhalten 2. Damit ist $y = 2$ und wir erhalten den Punkt $(1 \mid 2)$, den wir ins Koordinatensystem einzeichnen können. Dies machen wir mit jedem Wert der Definitionsmenge. Es zeichnet sich schnell eine Regelmässigkeit ab und wir müssen nicht mehr jeden einzelnen Punkt berechnen.

Den Graphen der Funktion f_2 zeichnen wir mit dem gleichen Vorgehen. Die Definitionsmenge besteht nun aber aus allen reellen Zahlen, was sich auf den Graphen auswirkt, wie wir unten sehen können.





Auf der linken Seite ist der Funktionsgraph eine Menge von getrennten Punkten. Die Regelmässigkeit besteht darin, dass sie alle auf der gleichen Geraden liegen. Auf der rechten Seite ist der Funktionsgraph eine Gerade (auch eine Menge von Punkten, aber wenn wir alle einzeichnen, ergibt sich eine Gerade).

Der Graph kann auch mit einer **Wertetabelle** gezeichnet werden. Diese wird ausgefüllt, danach werden die Punkte eingezeichnet. In der untenstehenden Tabelle sehen wir die Wertetabelle der Funktion $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}, f(x) = 2x$.

Übungen

4. Wir haben eine Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x + 3$.
   a) Liegt der Punkt $P = (4|6)$ unterhalb oder oberhalb des Graphen ?
   b) Zeichne den Graphen dieser Funktion im Bereich $x = -2$ bis $x = 5$ und kontrolliere (a) !
5. Zeichne den Graphen der Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = |x-2|$. $||$ ist das Betragszeichen, es ist z.B. $|-5| = 5$ und $|3| = 3$.

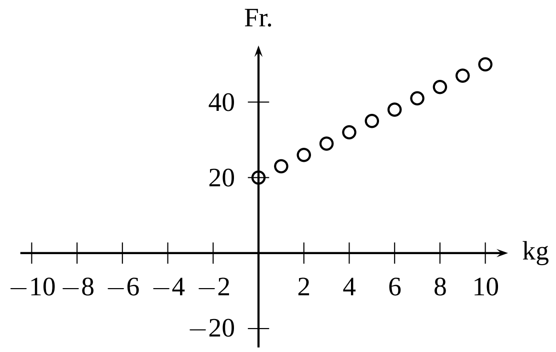
4 Was ist eine Funktion 1.Grades ?

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einem Beispiel:

Ein Apfelverkäufer hat bei seinem Arbeitsbeginn 20 Fr. in der Kasse. Für 1 kg Äpfel verlangt er 3 Fr. In der untenstehenden Tabelle sind ein paar möglich Kassenbestände eingetragen:

kg verkaufte Äpfel	3	5	10	x
Kassenbestand	29	35	50	$20 + 3x$

Der zugehörige Funktionsgraph sieht folgendermassen aus:



Wir sehen, dass **alle** Punkte des Graphen **auf einer Linie** liegen, wenn die Funktionsvorschrift $f(x) = 3x + 20$ lautet.

Weitere Beispiele von Funktionen 1.Grades:

- $f(x) = 2x - 4$
- $f(x) = -6x - 2$
- $f(x) = 0.5x + 1$
- $f(x) = x + 24$

Wir könnten unendlich viele Funktionen aufschreiben. Wir möchten nun in einer Zeile alle diese Informationen verpacken. Wie aber soll das geschehen ? Wir haben bei den proportionalen und den umgekehrt proportionalen Funkionen dieses Problem schon gelöst. Wir stellen dazu sogenannte Parameter zur Verfügung.

Die Zahl vor dem x und die hintere Zahl der Funktionsvorschrift können ändern, darum schreiben wir dort die **Parameter** m und n hin. Die Definition lautet nun:

Definition 1
Eine Funktion f heisst ***Funktion 1.Grades****, wenn ihre Vorschrift die Form*

Wir verzichten bewusst darauf, Definitions- und Bildmenge festzulegen, da sie von Fall zu Fall unterschiedlich sind.

In der obenstehenden Definition sind alle Funktionen 1.Grades gespeichert. Schauen wir nun, wie wir die oberen Beispiele aus dieser Definition erhalten können.

- $m = 2$ und $n = -4$: $f(x) = 2x - 4$
- $m = -6$ und $n = -2$: $f(x) = -6x - 2$
- $m = 0.5$ und $n = 1$: $f(x) = 0.5x + 1$
- $m = 1$ und $n = 24$: $f(x) = x + 24$

Übungen

6. Gib ein Beispiel einer Funktion an, die nicht den Grad 1 hat.

7. Die Punkte $A = (-6|?), B = (?|-6), C = (0|?)$ und $D = (?|0)$ liegen auf dem Graphen der Funktion $f(x) = 3x + 2$. Berechne die fehlenden Koordinaten dieser Punkte.
[$A = (-6|-16), B = (-8/3|-6), C = (0|2), D = (-2/3|0)$]

8. Für die Funktion 1.Grades $f(x) = \frac{2}{3}x + n$ gilt $f(-6) = 0$. Berechne n und $f(10)$. [$n = 4, f(10) = 10.\overline{6}$]

9. Für die Funktion 1.Grades $f(x) = mx + 4$ gilt $f(5) = 9$. Berechne m und $f(-5)$. [$m = 1, f(-5) = -1$]

10. Gegeben ist die Vorschrift $f(x) = 2x + 1$. Berechne den Schnittpunkt des Graphen mit der x-Achse und mit der y-Achse. [$(-0.5|0), (0|1)$]

11. Gegeben ist eine Funktion mit der Vorschrift $f(x) = 3$ (konstante Funktion).
    a) Liegt eine Funktion 1.Grades vor ? Wenn ja, dann bestimme die Variabeln m und n.
    b) Zeichne den Funktionsgraphen von f !

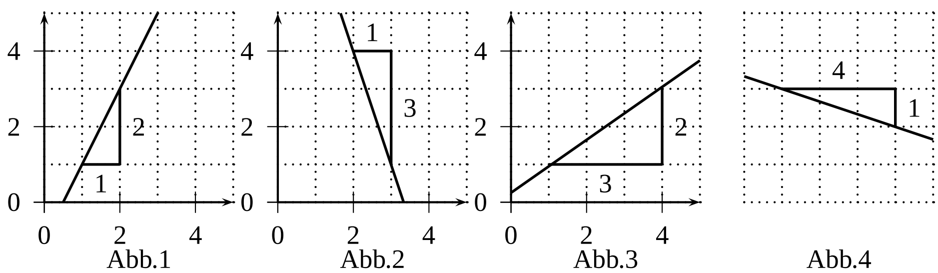
5 Die Steigung einer Geraden

5.1 Die Definition der Steigung

Wir bezeichnen die Steigung einer Geraden mit der Variablen m. Am naheliegendsten wäre es, einfach den Steigungswinkel zu nehmen. Dies erweist sich aber als nicht so günstig im Zusammenhang mit Funktionen. Darum wählen wir eine andere Art, um die Steigung anzugeben:

1. Wir wählen einen Punkt auf dem Graphen.
2. wir gehen um 1 Einheit nach rechts.
3. wir schauen wieviel wir nach oben oder nach unten gehen müssen, um wieder beim Graphen zu landen. Das ergibt dann gerade die Steigung.

Anhand von konkreten Beispielen werden die oberen Punkte sofort verständlich:



Die Steigungen werden nun folgendermassen bestimmt:

- Abb.1: Wenn wir 1 Einheit nach rechts gehen, geht es 2 Einheiten nach oben $\Rightarrow m = 2$.
- Abb.2: Wenn wir 1 Einheit nach rechts gehen, geht es 3 Einheiten nach unten $\Rightarrow m = -3$.
- Abb.3: Wenn wir 3 Einheiten nach rechts gehen, geht es 2 Einheiten nach oben $\Rightarrow$ Wenn wir 1 Einheit nach rechts gehen, geht es 2/3 Einheiten nach oben $\Rightarrow m = 2/3$.

- Abb.4: Wenn wir 3 Einheiten nach rechts gehen, geht es 1 Einheit nach unten $\Rightarrow$ Wenn wir 1 Einheit nach rechts gehen, geht es 1/3 Einheiten nach unten $\Rightarrow m = -1/3$.

Um die Steigung zu bestimmen, müssen wir ein geeignetes **Steigungsdreieck** zeichnen und dann die **Höhe** des Dreiecks **durch die Länge** des Dreiecks **dividieren**.

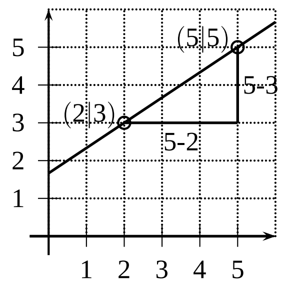
Für die Steigung gilt also die folgende Formel:

$$\boxed{\text{m}=\frac{\text{Höhe}}{\text{Länge}}}$$

5.2 Die Berechnung der Steigung aus zwei gegebenen Punkten.

Gegeben sind die zwei Punkte $P_1 = (2|3)$ und $P_2 = (5|5)$. Welche Steigung hat die Gerade, die durch diese beiden Punkte geht ?

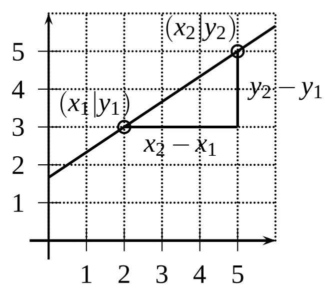
- Auf der nebenstehenden Abbildung sehen wir das Steigungsdreieck.
- Wir können die Höhe des Dreiecks berechnen: 5-3=2.
- Wir können die Länge des Dreiecks berechnen: 5-2=3.
- Die Steigung beträgt somit: $m = \dfrac{2}{3}$.



Nun der allgemeine Fall:

Gegeben sind die zwei Punkte $P_1 = (x_1|y_1)$ und $P_2 = (x_2|y_2)$, wobei gilt $x_2 > x_1$. Welche Steigung hat die Gerade, die durch diese beiden Punkte geht ?

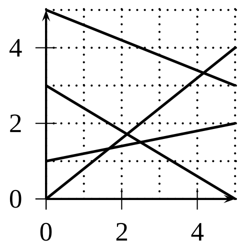
- Auf der nebenstehenden Abbildung sehen wir das Steigungsdreieck.
- Wir können die Höhe des Dreiecks berechnen: $y_2 - y_1$.
- Wir können die Länge des Dreiecks berechnen: $x_2 - x_1$.
- Die Steigung beträgt somit: $\boxed{m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$.



Übungen

11. Zeichne eine Gerade mit der Steigung 3 !
12. Bestimme die Steigung bei den abgebildeten 4 Strecken.

[0.8; 0.2; −0.6; −0.4]



13. Gegeben ist eine Gerade mit der Steigung $m = 2$, die durch den Punkt $P = (3|-2)$ geht.
    a) Zeichne den Funktionsgraphen !
    b) Berechne den Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse ! [$(4|0)$]
    c) Berechne den Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse ! [$(0|-8)$]
    d) Wie lautet die Funktionsvorschrift ? [$f(x) = 2x-8$]
    e) Gib einen weiteren Punkt an, der sich auf dem Funktionsgraphen befindet (nicht einer, der in dieser Aufgabe schon vorgekommen ist) ! [$(1|-6)$]

14. Gegeben sind die drei Punkte $P_1 = (2|23.6)$, $P_2 = (10|50)$ und $P_3 = (50|182)$. Diese Punkte können wir nur schwer in ein Koordinatensystem eintragen.
    a) Gibt es einen anderen Weg, um herauszufinden, ob alle drei Punkte auf einer Geraden liegen ?
    b) Welche Vorschrift muss ich wählen, damit der Graph durch diese drei Punkte geht ? [$f(x) = 3.3x+17$]

6 Die Bedeutung der Parameter m und n.

Betrachten wir noch einmal das Beispiel aus Abschnitt 1.3. Es lag die folgende Funktionsvorschrift vor:

$$f(x) = 3x+20.$$

Wenn wir den Graphen dazu betrachten, stellen wir zwei Dinge fest:

- Die Steigung des Graphen beträgt 3. Die Zahl vor dem x ist ebenfalls die 3.
- Der Graph schneidet die y-Achse an der Stelle 20. Der zweite Wert der Vorschrift ist ebenfalls 20.

Es liegt die Vermutung nahe, dass der Parameter m die Steigung angibt und der Parameter b den Schnittpunkt mit der y-Achse. Bei der nachfolgenden Übung können wir unsere Vermutung überprüfen:

Übung

1. Zeichne die Graphen der Funktionen $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = x+1$, $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = x+1.5$ und $f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_3(x) = x+4$ ins gleiche Koordinatensystem. Was beobachtest Du ?
2. Zeichne die Graphen der Funktionen $f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = 2x$, $f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_2(x) = 3x$ und $f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_3(x) = 0.5x$ ins gleiche Koordinatensystem. Was beobachtest Du ?

Die mathematischen Beweise dafür sind nicht schwierig.

Satz 1
Gegeben ist die Vorschrift $f(x) = mx+n$ $(m \in \mathbf{R}\backslash\{0\}, n \in \mathbf{R})$ und der dazugehörige Graph. Dann entspricht die Steigung des Graphen dem Parameter m.

Bew 1

- *Wir berechnen die Koordinaten von zwei Punkten und danach die Steigung zwischen diesen zwei Punkten.*
- $f(0) = m \cdot 0 + n = n \Rightarrow P_1 = (0|n)$.
- $f(1) = m \cdot 1 + n = m + n \Rightarrow P_2 = (1|m+n)$.
- $m = \dfrac{m+n-n}{1-0} = \dfrac{m}{1} = m$.

Satz 2

Gegeben ist die Vorschrift $f(x) = mx + n \quad (m \in \mathbf{R}\backslash\{0\}, n \in \mathbf{R})$ und der dazugehörige Graph. Dann entspricht die Schnitthöhe des Graphen mit der y-Achse dem Parameter n.

Bew 2

- *Der Schnittpunkt mit der y-Achse hat den x-Wert 0. Wir müssen schauen, welchen y-Wert wir an der Stelle 0 erhalten.*
- $f(0) = m \cdot 0 + n = n \Rightarrow P = (0|n)$.

Übungen

16. Die Gerade g geht durch die zwei Punkte $P_1 = (-3|-4)$ und $P_2 = (2|5)$, . Berechne:

    a) Die Funktionsvorschrift f, die genau diesen Graphen als Funktionsgraphen hat ! [$f(x) = 1.8x + 1.4$]

    b) Die Funktionsvorschrift g, deren Funktionsgraph parallel zu demjenigen von f ist, aber zwei Koordinateneinheiten weiter oben (Der Abstand zwischen den Geraden beträgt 2 Einheiten)! [$f(x) = 1.8x + 5.52$]

17. Gegeben sind zwei Funktionen f und g, mit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 3x + 2$ und $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, g(x) = 4x + 4$.

    a) Die Funktionsgraphen von f und g haben genau einen Schnittpunkt S. Finde ihn ! [$(-2|-4)$]

    b) Zeichne die Graphen von f und g und überprüfe Dein Ergebnis aus a).

18. a) Kannst Du zwei Funktionen f und g angeben, wo Du den Schnittpunkt der Funktionsgraphen direkt ablesen kannst ? [$f(x) = 2x + 3, g(x) = 3x + 3$]

    b) Kannst Du zwei Funktionen f und g angeben, deren Funktionsgraphen keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben ? [$f(x) = 2x + 3, g(x) = 2x + 4$]

    c) Gibt es einen Fall, wo mehr als ein Schnittpunkt vorliegt ? [$f(x) = 2x + 3, g(x) = 2x + 3$]

19. Zeichne eine beliebige Gerade und bestimme die Funktionsvorschrift davon !

7 Text- und 3 weitere Aufgaben

19. Ein Radfahrer fährt zur Zeit $t = 0$ mit einer konstanten Geschwindigkeit von 18km/h los. Ein Mofafahrer fährt 10min später mit einer konstanten Geschwindigkeit von 24km/h los.

    a) Nach welcher Zeitdauer (aus der Sicht des Velofahrers) treffen sie sich ? [40min]

    b) Stelle die Situation zeichnerisch dar !

20. In der Physik gilt das Gesetz: $v(t) = v_0 + at$. Begründe nun folgende Aussage:
Wenn der Graph eines v-t-Diagramms parallal zur x-Achse ist, dann ist die Beschleunigung 0.

21. -17.8 Grad Celsius entsprechen 0 Grad Fahrenheit und 37.8 Grad Celsius entsprechen 100 Grad Fahrenheit.

    a) In der obigen Situation liegt eine Zuordnung vor. Wir ordnen x Grad Celsius y Grad Fahrenheit zu. Diese Zuordnung können wir mit einer linearen Funktionsvorschrift beschreiben (Dass sie linear ist, können wir nicht selber herausfinden, das ist gegeben). Finde diese Vorschrift. [$f(x) = 1.8x + 32.04$]

    b) Wieviel Grad Fahrenheit entsprechen 100 Grad Celsius ? Wieviel Grad Celsius entsprechen 70 Grad Fahrenheit ? [$100°C \widehat{=} 211.96°F, 70°F \widehat{=} 21.13°C$]

    c) Bei wieviel Grad Fahrenheit liegt der Gefrierpunkt von Wasser (0° Celsius)? [$31.96°F$]

    d) Stelle eine Funktion g auf, die Temperaturen von Grad Fahrenheit in Grad Celsius umrechnet. [$g(x) = \frac{x-31.96}{1.8}$]

22. Eine Schraubenfeder in in unbelastetem Zustand 8cm, bei einer Belastung mit 5 N 11 cm lang. Die Zuordnung Kraft $x \mapsto$ Dehnung y ist dabei linear.

    a) Berechne die Zuordnungsvorschrift. [$f(x) = 0.6x + 8$]

    b) Berechne die Federlänge für 4N. [10.4cm]

23. Eine 80 cm hohe zylinderförmige Regentonne wird bei gleichmässigem Zulauf mit Wasser gefüllt. Nach 3 Minuten steht das Wasser 25 cm hoch, nach weiteren 2 Minuten steht es 33 cm hoch. Wie lange dauert es, bis die Tonne voll ist ? [16.75min]

24. Gegeben sind die zwei linearen Funktionen $f_1(x) = 3x + 5$ und $f_2(x) = 2x - 4$. Berechne den Schnittpunkt und die beiden Schnittwinkel der Graphen dieser beiden Funktionen. [$(-9|-22), 8.13°, 171.87°$]

25. Die Gerade g_1 geht durch die Punkte $P_1 = (1 \mid 1)$ und $P_2 = (3 \mid 5)$. Die Gerade g_2 geht durch die Punkte $P_1 = (0 \mid 5)$ und $P_2 = (4 \mid 1)$. <u>Berechne</u> den Schnittpunkt der beiden Geraden und prüfe danach zeichnerisch nach. [$(2 \mid 3)$]

26. Gegeben ist eine Funktion 1.Grades $f(x) = mx + n$. Berechne den Winkel des Graphen mit der x-Achse ! [$\alpha = \tan^{-1}(m)$]

27. *Gegeben sind die zwei Funktionen 1.Grades $f(x) = m_1x + n_1$ und $g(x) = m_2x + n_2$. Leite eine Formel für den Schnittpunkt her ! [$\left(\frac{n_2-n_1}{m_1-m_2} \mid \frac{m_1n_2-n_1m_2}{m_1-m_2}\right)$]