

Lösungen lineare Funktionen

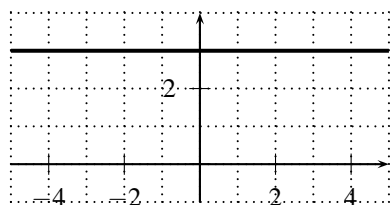
- Schnittpunkt gegeben bestimme Funktionsvorschrift.
- Flächeninhalt von eingeschlossenem Dreieck berechnen.
- Schnittwinkel gegeben, berechne Steigung.

1. Gegeben ist eine Funktion mit der Vorschrift $f(x) = 3$ (konstante Funktion).

(a) Ist diese Funktion linear? Wenn ja, dann bestimme die Variablen a und b .

- ja, $a = 0, b = 3$.

(b) Zeichne den Funktionsgraphen von f !



2. Gib ein Beispiel einer Funktion an, die nicht linear ist.

- Z.B. $f(x) = x^2$.

3. Die Punkte $A = (-6|?)$, $B = (?|-6)$, $C = (0|?)$ und $D = (?|0)$ liegen auf dem Graphen der linearen Funktion $f(x) = 3x + 2$. Berechne die fehlenden Koordinaten dieser Punkte.

- $f(-6) = -16 \Rightarrow$ $A = (-6|-16)$.
- $-6 = 3x + 2 \Rightarrow x = -8/3 \Rightarrow$ $B = (-8/3|-6)$.
- $f(0) = 2 \Rightarrow$ $C = (0|2)$.
- $0 = 3x + 2 \Rightarrow x = -2/3 \Rightarrow$ $D = (-2/3|0)$.

4. Für die lineare Funktion $f(x) = \frac{2}{3}x + b$ gilt $f(-6) = 0$. Berechne b und $f(10)$.

- $0 = \frac{2}{3}(-6) + b \Rightarrow 0 = -4 + b \Rightarrow$ $b = 4$.
- $f(x) = \frac{2}{3}x + 4 \Rightarrow$ $f(10) = 20/3 + 4 = 32/3 = 10.67$

5. Für die lineare Funktion $f(x) = ax + 4$ gilt $f(5) = 9$. Berechne a und $f(-5)$.

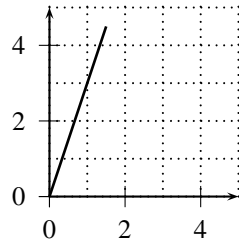
- $9 = 5a + 4 \Rightarrow$ $a = 1$.
- $f(x) = x + 4 \Rightarrow$ $f(-5) = -1$.

6. Gegeben ist die Vorschrift $f(x) = 2x + 1$. Berechne den Schnittpunkt des Graphen mit der x -Achse und mit der y -Achse.

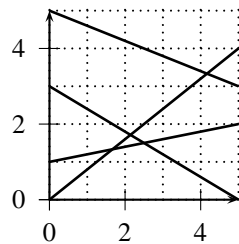
- Schnittpunkt mit x -Achse: $P_x = (x|0) \Rightarrow 0 = 2x + 1 \Rightarrow x = -0.5 \Rightarrow$ $P_x = (-0.5|0)$.
- Schnittpunkt mit y -Achse: $P_y = (0|y) \Rightarrow y = 2 \cdot 0 + 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$ $P_y = (0|1)$.

7. Zeichne eine Gerade mit der Steigung 3 !

- 1 Häuschen nach rechts, 3 Häuschen nach oben:



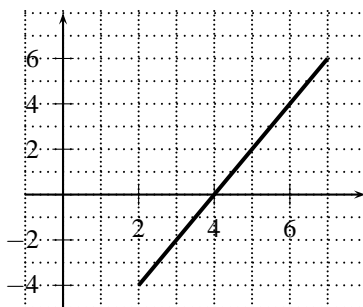
8. Bestimme die Steigung und den Winkel zur x -Achse und y -Achse bei den abgebildeten 4 Linien.



- Gerade mit Anfangspunkt $(0|0)$:
 - Länge=5, Höhe=4 $\Rightarrow \underline{a_1} = 4/5 = \underline{0.8}$.
 - $\tan(\alpha_1) = \frac{4}{5} \Rightarrow \underline{\alpha_1} = \tan^{-1}(0.8) = \underline{38.66^\circ} \Rightarrow \underline{\beta_1} = 90^\circ + 38.66^\circ = \underline{51.34^\circ}$.
- Gerade mit Anfangspunkt $(0|1)$:
 - Länge=5, Höhe=1 $\Rightarrow \underline{a_2} = 1/5 = \underline{0.2}$.
 - $\tan(\alpha_2) = \frac{1}{5} \Rightarrow \underline{\alpha_2} = \tan^{-1}(0.2) = \underline{11.31^\circ} \Rightarrow \underline{\beta_2} = 90^\circ - 11.31^\circ = \underline{78.69^\circ}$.
- Gerade mit Anfangspunkt $(0|3)$:
 - Länge=5, Höhe=-3 $\Rightarrow \underline{a_3} = -3/5 = \underline{-0.6}$.
 - $\tan^{-1}(-0.6) = -30.96^\circ \Rightarrow \underline{\alpha_3} = 180^\circ - 30.96^\circ = \underline{149.04^\circ} \Rightarrow \underline{\beta_3} = 149.04^\circ - 90^\circ = \underline{59.04^\circ}$.
- Gerade mit Anfangspunkt $(0|5)$:
 - Länge=5, Höhe=-2 $\Rightarrow \underline{a_4} = -2/5 = \underline{-0.4}$.
 - $\tan^{-1}(-0.4) = -21.80^\circ \Rightarrow \underline{\alpha_4} = 180^\circ - 21.80^\circ = \underline{158.2^\circ} \Rightarrow \underline{\beta_4} = 158.2^\circ - 90^\circ = \underline{68.2^\circ}$.

9. Gegeben ist eine Gerade mit der Steigung $a = 2$, die durch den Punkt $P = (3 | -2)$ geht.

(a) Zeichne den Funktionsgraphen !



- (b) Berechne den Schnittpunkt der Geraden mit der x -Achse !
- Zuerst muss die Funktionsvorschrift berechnet werden.
 - $f(x) = 2x + b$, dazu geht der Graph durch den Punkt $(3|-2) \Rightarrow -2 = 2 \cdot 3 + b \Rightarrow b = -8 \Rightarrow \underline{f(x) = 2x - 8}$.
 - Schnittpunkt mit der x -Achse: $0 = 2x - 8 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \underline{P_x = (4|0)}$.
- (c) Berechne den Schnittpunkt der Geraden mit der y -Achse !
- $f(0) = 2 \cdot 0 - 8 = -8 \Rightarrow \underline{P_y = (0|-8)}$.
- (d) Wie lautet die Funktionsvorschrift ?
- $\underline{f(x) = 2x - 8}$
- (e) Gib einen weiteren Punkt an, der sich auf dem Funktionsgraphen befindet (nicht einer, der in dieser Aufgabe schon vorgekommen ist) !
- $f(1) = -6 \Rightarrow \underline{(1|-6)}$.
10. Gegeben sind die drei Punkte $P_1 = (2|23.6)$, $P_2 = (10|50)$ und $P_3 = (50|182)$. Diese Punkte können wir nur schwer in ein Koordinatensystem eintragen !
- (a)
- Ja, wir müssen einfach die Steigungen vergleichen zwischen den Punkten.
 - Steigung zwischen P_1 und P_2 : $a_1 = \frac{50 - 23.6}{10 - 2} = \underline{3.3}$.
 - Steigung zwischen P_2 und P_3 : $a_2 = \frac{182 - 50}{50 - 10} = \underline{3.3}$.
 - Die Steigungen sind identisch, damit:
Alle drei Punkte liegen auf der gleichen Geraden.
- (b) Welche Vorschrift muss ich wählen, damit der Graph durch die drei Punkte geht ?
- $a = 3.3$, damit können wir schreiben: $\underline{f(x) = 3.3x + b}$.
 - Punkt $P_1 = (2|23.6)$ (z.B) einsetzen: $23.6 = 3.3 \cdot 2 + b \Rightarrow \underline{17 = b}$.
 - $\underline{f(x) = 3.3x + 17}$.
11. Die Gerade g geht durch die zwei Punkte $P_1 = (-3|-4)$ und $P_2 = (2|5)$. Berechne:
- (a) Den Winkel α , welchen g mit der x -Achse bildet !
- Zuerst muss die Steigung zwischen P_1 und P_2 berechnet werden.
 - $\underline{a = \frac{5 - (-4)}{2 - (-3)} = \frac{9}{5} = 1.8}$.
 - $\underline{\alpha = \tan^{-1}(1.8) = 60.95^\circ}$.
- (b) Den Winkel β , welchen g mit der y -Achse bildet !
- $\underline{\beta = 90^\circ - 60.95^\circ = 29.05^\circ}$
- (c)
- $a = 1.8$, damit können wir schreiben: $\underline{f(x) = 1.8x + b}$.
 - Punkt $P_1 = (-3|-4)$ (z.B) einsetzen: $-4 = 1.8 \cdot (-3) + b \Rightarrow \underline{b = 1.4}$.
 - $\underline{f(x) = 1.8x + 1.4}$.
- (d) Die Funktionsvorschrift g , deren Funktionsgraph parallel zu demjenigen von f ist, aber zwei Koordinateneinheiten weiter oben (Die Distanz zwischen den Geraden beträgt 2 Einheiten)!
- $\underline{\cos(\alpha) = \frac{2}{h} \Rightarrow h = 4.12 \Rightarrow y = 1.4 + 4.12 = 5.52}$
 $\Rightarrow \underline{g(x) = 1.8x + 5.52}$
12. Gegeben sind zwei Funktionen f und g , mit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 3x + 2$ und $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = 4x + 4$.
- (a) Die Funktionsgraphen von f und g haben genau einen Schnittpunkt S . Finde ihn !

- Gleichsetzen: $3x + 2 = 4x + 4 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow \underline{x = -2}$.
 - y -Wert berechnen: $\underline{y = f(-2) = 3(-2) + 2 = -4}$.
 - $\underline{S = (-2 | -4)}$
- (b) Zeichne die Graphen von f und g und überprüfe Dein Ergebnis aus a).
- (c) Kannst Du zwei Funktionen f und g angeben, wo Du den Schnittpunkt der Funktionsgraphen direkt ablesen kannst ?
- z.B. $\underline{f(x) = 2x + 3, g(x) = 3x + 3}$. Die hintere Zahl muss identisch sein, d.h. der Schnittpunkt mit der y -Achse ist identisch.
- (d) Kannst Du zwei Funktionen f und g angeben, deren Funktionsgraphen keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben ?
- z.B. $\underline{f(x) = 2x + 3, g(x) = 2x + 4}$. Die Steigungen müssen identisch sein, die Schnittpunkte mit der y -Achse müssen verschieden sein.
- (e) Gibt es einen Fall, wo mehr als ein Schnittpunkt vorliegt ?
- Ja, wenn die Geraden übereinanderliegen, z.B.
 $\underline{f(x) = 2x + 3, g(x) = 2x + 3}$.
13. Zeichne eine beliebige Gerade und bestimme von ihr die Funktionsvorschrift !
- s. Übungen.
14. Ein Radfahrer fährt zur Zeit $t = 0$ mit einer konstanten Geschwindigkeit von 18km/h los. Ein Mofafahrer fährt 10min später mit einer konstanten Geschwindigkeit von 24km/h los.
- (a) Nach welcher Zeitdauer (aus der Sicht des Velofahrers) treffen sie sich ?
- Radfahrer: $\underline{f(x) = 18x}$ (x : Anzahl Stunden, $f(x)$: Geschwindigkeit in km/h).
 - Mofafahrer:
 - $f(x) = 24x + b$.
 - Der Mofafahrer hat bei $x = 1/6$ (entspricht 10min) die Geschwindigkeit 0. Anders gesagt: Der Graph des Mofafahrers geht durch den Punkt $(1/6|0)$.
 - $0 = 24 \cdot 1/6 + b \Rightarrow 0 = 4 + b \Rightarrow b = -4$.
 - $\underline{f(x) = 24x - 4}$
 - Gleichsetzen: $18x = 24x - 4 \Rightarrow -6x = -4 \Rightarrow \underline{x = 2/3}$.
 - Aus Sicht des Radfahrers treffen sie sich nach 40 min.
- (b) s. Übungen.
15. In der Physik gilt das Gesetz: $v(t) = v_0 + at$. Begründe nun folgende Aussage:
Wenn der Graph eines v - t -Diagramms parallel zur x -Achse ist, dann ist die Beschleunigung 0.
- Die Zahl vor der Variablen t entspricht der Beschleunigung.
 - Wenn der Graph parallel zur x -Achse ist, ist die Steigung 0.
 - Damit ist dann die Beschleunigung 0.
16. -17.8 Grad Celsius entsprechen 0 Grad Fahrenheit und 37.8 Grad Celsius entsprechen 100 Grad Fahrenheit.
- (a) In der obigen Situation liegt eine Zuordnung vor. Wir ordnen x Grad Celsius y Grad Fahrenheit zu. Diese Zuordnung können wir mit einer linearen Funktionsvorschrift beschreiben (Dass sie linear ist, können wir nicht selber herausfinden, das ist gegeben). Finde diese Vorschrift.
- Steigung berechnen: $a = \frac{100 - 0}{37.8 - (-17.8)} = \frac{100}{55.6} = 1.8$.

- Wir können schreiben: $f(x) = 1.8x + b$.
 - Den Punkt $(-17.8|0)$ einsetzen: $0 = 1.8(-17.8) + b \Rightarrow b = \underline{32.04}$.
 - $f(x) = 1.8x + 32.04$
- (b) Wieviel Grad Fahrenheit entsprechen 100 Grad Celsius ? Wieviel Grad Celsius entsprechen 70 Grad Fahrenheit ?
- [$100^\circ\text{C} \triangleq 211.96^\circ\text{F}, 70^\circ\text{F} \triangleq 21.13^\circ\text{C}$]
- $f(100) = 1.8 \cdot 100 + 32.04 = 212.04 \Rightarrow \underline{100^\circ\text{C}} \text{ entsprechen } \underline{212.04^\circ\text{F}}$
 - $70 = 1.8x + 32.04 \Rightarrow x = 21.09 \Rightarrow \underline{70^\circ\text{F}} \text{ entsprechen } \underline{21.09^\circ\text{C}}$
- (c) Bei wieviel Grad Fahrenheit liegt der Gefrierpunkt von Wasser (0° Celsius)?
- $f(0) = 1.8 \cdot 0 + 32.04 = 32.04 \Rightarrow \underline{0^\circ\text{C}} \text{ entsprechen } \underline{32.04^\circ\text{F}}$.
- (d) Stelle eine Funktion g auf, die Temperaturen von Grad Fahrenheit in Grad Celsius umrechnet.
- Umkehrfunktion berechnen.
 - $f(x) = 1.8x + 32.04 \Rightarrow y = 1.8x + 32.04$.
 - $1.8x = y - 32.04 \Rightarrow x = \frac{y - 32.04}{1.8} \Rightarrow \underline{g(y) = \frac{y - 32.04}{1.8}}$.
17. Eine Schraubenfeder in in unbelastetem Zustand 8cm, bei einer Belastung mit 5N 11cm lang. Die Zuordnung Kraft $x \mapsto$ Dehnung y ist dabei linear.
- a)
- Steigung berechnen: $a = \frac{11 - 8}{5 - 0} = \frac{3}{5} = 0.6$.
 - Wir können schreiben: $f(x) = 0.6x + b$.
 - Den Punkt $(5|11)$ einsetzen: $11 = 0.6 \cdot 5 + b \Rightarrow b = \underline{8}$.
 - $f(x) = 0.6x + 8$
- b) Berechne die Federlänge für 4N.
- $f(4) = 0.6 \cdot 4 + 8 = 10.4 \Rightarrow \underline{10.4\text{cm}}$
18. Eine 80cm hohe zylinderförmige Regentonnen wird bei gleichmässigem Zulauf mit Wasser gefüllt. Nach 3 Minuten steht das Wasser 25cm hoch, nach weiteren 2 Minuten steht es 33cm hoch. Wie lange dauert es, bis die Tonne voll ist ?
- – Steigung berechnen: $a = \frac{33 - 25}{5 - 3} = \frac{8}{2} = 4$.
 - Wir können schreiben: $f(x) = 4x + b$.
 - Den Punkt $(3|25)$ einsetzen: $25 = 4 \cdot 3 + b \Rightarrow b = \underline{13}$.
 - $f(x) = 4x + 13$
 - $80 = 4x + 13 \Rightarrow 4x = 67 \Rightarrow 16.75 \Rightarrow \underline{\text{nach } 16.75 \text{ Minuten}}$
19. Gegeben sind die zwei linearen Funktionen $f_1(x) = 3x + 5$ und $f_2(x) = 2x - 4$. Berechne den Schnittpunkt und die beiden Schnittwinkel der Graphen dieser beiden Funktionen. $[(-9|-22), 8.13^\circ, 171.87^\circ]$
- Gleichsetzen: $3x + 5 = 2x - 4 \Rightarrow x = -9$
 - y -Wert berechnen: $f_1(-9) = 3(-9) + 5 = -22$
 - $S = (-9|-22)$.
20. Die Gerade g_1 geht durch die Punkte $P_1 = (1 | 1)$ und $P_2 = (3 | 5)$. Die Gerade g_2 geht durch die Punkte $P_1 = (0 | 5)$ und $P_2 = (4 | 1)$. Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden und prüfe danach zeichnerisch nach.
- Gerade g_1 : $f_1(x) = ax + b$. Ziel ist es, die Parameter a und b herauszufinden.

- $a_1 = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2.$
- Wir können damit schreiben: $f_1(x) = 2x + b.$
- Den Punkt P_1 in die Gleichung einsetzen:
 - $y = 2x + b$
 - $1 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -1$
- Wir können schreiben: $f_1(x) = 2x - 1.$
- Gerade g_2 : $f_2(x) = ax + b.$ Ziel ist es, die Parameter a und b herauszufinden.
- $a_2 = \frac{1-5}{4-0} = \frac{-4}{4} = -1.$
- Wir können damit schreiben: $f_2(x) = -x + b.$
- Der Schnittpunkt mit der y -Achse ist durch den Punkt $(0|5)$ gegeben. Damit ist $b = 5.$
- Wir können schreiben: $f_2(x) = -x + 5.$
- Um den x -Wert des Schnittpunktes zu ermitteln, müssen wir gleichsetzen: $2x - 1 = -x + 5 \Rightarrow x = 2.$
- Um den y -Wert zu ermitteln, müssen wir einsetzen: $f_1(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3.$
- Zur Kontrolle können wir noch in die andere Vorschrift einsetzen: $f_2(2) = -2 + 5 = 3, \text{ok.}$
- Der Schnittpunkt beträgt damit: $S = (2|3)$

21. Berechne den Schnittwinkel der beiden Geraden.

- $\alpha = \tan^{-1}(2) = 63.43^\circ.$
- $\beta = \tan^{-1}(-1) = -45^\circ.$
- $\gamma = 63.43^\circ + 45^\circ = 108.43^\circ$

22. Gegeben ist eine lineare Funktion $f(x) = ax + b.$ Berechne den Winkel des Graphen mit der x -Achse !

- $\alpha = \tan^{-1}(a).$ Bei negativer Steigung erhalten wir hier den negativen Schnittwinkel.

23. Gegeben sind die zwei linearen Funktionen $f(x) = ax + b$ und $g(x) = cx + d.$ Leite eine Formel für den Schnittwinkel her !

- Es ist die Differenz zwischen dem grösseren Winkel und dem kleineren Winkel zu berechnen.
- 1.Fall: $a > c \Rightarrow \tan^{-1}(a) - \tan^{-1}(c)$
- 2.Fall: $a < c \Rightarrow \tan^{-1}(c) - \tan^{-1}(a)$
- Beide Fälle können elegant in eine Formel verpackt werden:

$$|\tan^{-1}(a) - \tan^{-1}(c)|$$

24. *Gegeben sind die zwei linearen Funktionen $f(x) = ax + b$ und $g(x) = cx + d.$ Leite eine Formel für den Schnittpunkt her !

- Gleichsetzen: $ax + b = cx + d.$
- $ax - cx = d - b \Rightarrow x(a - c) = d - b \Rightarrow x = \frac{d - b}{a - c}.$
- Einsetzen, um y zu berechnen:

$$\begin{aligned} \underline{y} &= f\left(\frac{d-b}{a-c}\right) = a \frac{d-b}{a-c} + b = \frac{a(d-b)}{a-c} + \frac{b(a-c)}{a-c} \\ &= \frac{ad-ab}{a-c} + \frac{ba-bc}{a-c} = \frac{ad-ab+ba-bc}{a-c} = \underline{\underline{\frac{ad-bc}{a-c}}} \end{aligned}$$

- Die Koordinaten des Schnittpunktes lauten: $\underline{\underline{\left(\frac{d-b}{a-c} \mid \frac{ad-bc}{a-c} \right)}}$.