Thema aus dem Bereich Algebra -
1.1 lineare Gleichungen und Ungleichungen

Inhaltsverzeichnis

1 allgemeine Gleichungen **2**

2 lineare Gleichungen mit einer Variabeln **2**

3 allgemeingültige und nichterfüllbare Gleichungen **5**

4 Textaufgaben, die auf lineare Gleichungen führen **5**

5 Auflösen von Gleichungen mit Parametern **6**

6 Ungleichungen **7**

7 Intervalle **7**

8 Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen **8**

1 allgemeine Gleichungen

Definition 1 *Werden zwei Terme T_1 und T_2 durch ein Gleichheitszeichen (=) miteinander verbunden, so entsteht eine Gleichung: $T_1 = T_2$.*

Beispiele

Wir suchen immer nach der **Lösung** der Gleichung. Was das konkret heisst, werden wir im nächsten Abschnitt sehen.

2 lineare Gleichungen mit einer Variabeln

Wir betrachten zuerst sehr einfache Gleichungen, die wir bereits kennen:

Die folgenden Gleichungen betrachten wir erst zu einem späteren Zeitpunkt:

Wir können bei den oberen drei Gleichungen zwei Dinge beobachten:

Einer solchen Gleichung sagen wir ....

Dazu kommt noch, dass wir angeben müssen, welchen Zahlenbereich wir einsetzen dürfen für die Variable. Diesem Zahlenbereich sagen wir .... Mögliche Grundmengen mit unserem Wissen: $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$.

Wir nehmen nun eine lineare Gleichung:

$$3x = 6$$

Frage:

Die Antwort auf die Frage ist einfach: Wir müssen für x die Zahl 2 einsetzen. Einer Zahl mit dieser Eigenschaft sagen wir **Lösung** der Gleichung. Der Gesamtheit von allen Lösungen sagen wir **Lösungsmenge**. Die Lösung einer linearen Gleichung können wir rechnerisch ermitteln, indem wir nach der **Unbekannten auflösen**. Bei den folgenden Umformungen wird die Lösungsmenge der Gleichung nicht verändert:

Diese Umformungen heissen ...., weil die Lösungsmenge der Gleichung nicht verändert wird. Mit Hilfe dieser Umformungen kann ....

Beispiel:

$$97 + 2x - (19x - 15) + 3 = 107 - 7x - (11x - (5 + 3x))$$

Wir lösen die Gleichung auf:

Wir können nun die Frage nach der **allgemeinen Lösung** (d.h. die Lösung der Gleichung $ax + b = 0$) stellen:

- $ax + b = 0$

  Wir lösen die Gleichung nach x auf:

Dies führt uns zu folgendem Satz, den wir aufgrund obenstehender Berechnung nicht mehr beweisen müssen:

1. Löse die folgenden Gleichungen in der gegebenen Grundmenge (**N**=natürliche Zahlen, **Z**=ganze Zahlen, **Q**=rationale Zahlen) ohne TR.

   a) $3x = 5, \mathbf{G} = \mathbf{N}$
   b) $3x = 5, \mathbf{G} = \mathbf{Z}$
   c) $3x = 5, \mathbf{G} = \mathbf{Q}$
   d) $3x = -6, \mathbf{G} = \mathbf{N}$
   e) $3x = -6, \mathbf{G} = \mathbf{Z}$
   f) $3x = -6, \mathbf{G} = \mathbf{Q}$

2. Notiere eine Gleichung, die in **Z**, aber nicht in **N** eine Lösung hat.

3. Löse die folgenden Gleichungen in **Q** ohne TR.

   a) $x + 10 = 16$
   b) $x - 28 = 12$
   c) $13 = x + 13$
   d) $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
   e) $7\frac{1}{3} = 11 + x$
   f) $7 = \frac{1}{3}x$
   g) $-11 = 0.11x$
   h) $0x = 0$
   i) $0x = 17$

4. Notiere eine Gleichung, welche in **Q** die Lösung -3/7 hat.

5. Löse die folgenden Gleichungen in **Q**.

   a) $14x - 6 + 5x + 15 = 3x + 22 + 13x - 7$
   b) $3x + 30 - (x + 28) = 3x - (2x + 4)$
   c) $9x - [4x - (4 + x)] = 4x + 8$

6. Löse die folgenden Gleichungen in **Q**.

   a) $12(x - 1) = 64 - 14(x - 2)$
   b) $9(3x - 11) = 6(9x - 4)$
   c) $2[3x + 2(3x - 2)] = 4(4x - 1)$
   d) $(5 + 4b)(3x - 6) = (6x - 7)(2b + 10)$
   e) $5[3 - (8x + 1)(6 - 3a)] = 3[40ax - 3(5x - a)]$
   f) $\frac{8}{3}\left(6x - \frac{9}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(8x + \frac{1}{3}\right) = 4x - \frac{1}{2} - \frac{4}{5}\left(10x - \frac{5}{8}\right) + 3\frac{1}{2}$

7. Löse die folgenden Gleichungen in $\mathbf{Q}$.

   a) $(x-5)^2+(x+2)^2=(x+3)^2+(x-10)^2$ b) $(4x+1)^2-(4x)^2-(x-1)^2+(x-10)^2=0$

3 allgemeingültige und nichterfüllbare Gleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei besondere Sorten von Gleichungen:

- Gleichungen, die keine Lösung haben.
- Gleichungen, die unendlich viele Lösungen haben.

4 Textaufgaben, die auf lineare Gleichungen führen

8. Wenn man das Vierfache einer bestimmten Zahl um eins vermindert, erhält man das Fünffache der um 4 verminderten Zahl. Wie heisst die Zahl ? [19]

9. Vater und Tochter haben einen Altersunterschied von 28 Jahren. Nach 16 Jahren wird der Vater gerade doppelt so alt sein wie die Tochter. Wie alt sind die beiden heute ? [V: 40 J., T: 12 J.]

10. Eine Treppe hat 16 Stufen. Würde man jede Stufe um 2.5 cmhöher machen, könnte man zwei Stufen einsparen. Wie hoch ist eine Stufe, wie hoch die ganze Treppe ? [Eine Stufe: 17.5 cm, Treppe: 280 cm]

11. Die Summe von fünf aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 385. Welches ist die kleinste dieser Zahlen ? [75]

12. Die Summe von vier aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist 740. Welches ist die grösste dieser 4 Zahlen ? [188]

13. In einem Viereck ist der Winkel Beta um 10° grösser als Alpha. Gamma übertrifft Beta um 20° und ist selber um 30° kleiner als Delta. Wie gross sind diese vier Winkel ? [65°,75°,95°,125°]

14. Die Summe des Zählers und des Nenners eines ungekürzten Bruches beträgt 120. Nach vollständigem Kürzen erhalten wir den Bruch 7/8. Welchen Bruch hatten wir ursprünglich ? [56/64]

15. Wenn ich eine Zahl mit 25 multipliziere, vom Produkt 700 subtrahiere und die Differenz durch 7 dividiere, so erhalte ich dasselbe, wie wenn ich vom Vierfachen der Zahl die Hälfte der Zahl subtrahiere und zur Differenz 42 addiere. [1988]

16. Vergrössert man bei einem Würfel die Kantenlänge um 5 cm, so wächst seine Oberfläche um 990 cm^2. Welches ist die ursprüngliche Länge einer Kante ? [14]

17. In einem Gehege werden Kaninchen und Hühner gehalten. Sie haben zusammen 35 Köpfe und 94 Beine. Wieviele Tiere von jeder Art sind im Gehege ? [12 K., 23 H.]

18. Zwei Zahlen unterscheiden sich um 4, ihre Quadrate um 480. Welches ist die grössere der beiden Zahlen ? [28]

19. Jemand möchte eine Badewanne mit 220 Litern Wasser füllen. Es stehen ihm heisses Boilerwasser (62°) und kaltes Leitungswasser (7°) zur Verfügung. Wieviele Liter vom heissen und vom kalten Wasser muss er nehmen, damit das Badewasser eine Temperatur von 36° aufweist ?

20. Drei Kapitalien von 4000 Fr., 5500 Fr. und 8500 Fr. ergeben einen Jahreszins von zusammen 740 Fr. Der Zinssatz für das 2.Kapital ist ein halbes Prozent höher als derjenige für das 1.Kapital, und der Zinssatz für das 3.Kapital ist um ein ganzes Prozent höher als für das 2.Kapital. Welches sind die 3 Zinssätze ?

21. Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 12. Vertauscht man ihre Ziffern, wird sie um 18 grösser. Wie heisst die ursprüngliche Zahl ? [57]

5 Auflösen von Gleichungen mit Parametern

Wir betrachten nun eine Gleichung, wo nebst der Unbekannten noch weitere Variabeln vorhanden sind, sogenannte Parameter. Es sollte jeweils gesagt werden, welches die Unbekannte ist und welches die Parameter sind. Dazu folgendes Beispiel (es soll nach x aufgelöst werden):

$$ay + bx = a - cx$$

22. Löse die folgenden Gleichungen nach x auf.

a) $bx + cx = mb + mc$

b) $ay + bx = a - cx$

c) $4(ax - b) = 2(ax + 2a - bx)$

d) $(x - 4a)^2 - x(x + b) = b(7x + 16b)$

e) $2mx(mx - n) - (mx - n)^2 = mn(m + n) - 2n^2)$

f) $(x + a + 1)^2 - (x + a - 1)^2 + 2x - a = 0$

23. Löse jeweils nach der angegebenen Variable auf.

a) $y = ax + b$, nach x

b) $m_1c_1(t - t_1) = m_2c_2(t_2 - t)$, nach t

c) $l = l_0(1 + \alpha\Delta t)$, nach α

d) $a_n - a_1 = d(n - 1)$, nach n

6 Ungleichungen

Ein paar Beispiele von Ungleichungen:

1. $x < 5$
2. $3x + 4 \leq 4$
3. $(x + 4)(x + 5) \geq 3$

Definition 2 *Werden zwei Terme T_1 und T_2 durch $<, >, \leq$ oder $\geq$ miteinander verbunden, so entsteht eine Ungleichung: $T_1 < T_2, T_1 \leq T_2, T_1 > T_2$ oder $T_1 \geq T_2$.*

7 Intervalle

Intervalle eignen sich, um Lösungmengen von Ungleichungen anzugeben.

Beschreibung des Intervalls	Intervall-symbol	Zeichnung des Intervalls
Menge aller Zahlen links von a **einschliesslich** a		
Menge aller Zahlen links von a **ohne** a		
Menge aller Zahlen rechts von a **einschliesslich** a		
Menge aller Zahlen rechts von a **ohne** a		

24. Stelle die folgenden Intervalle graphisch dar:

a) $(4, 5)$

b) $[2, 5]$

c) $(0, 6]$

d) $[7, 9)$

25. Notiere die folgenden Intervalle (z.B. $[3, \infty)$)

8 Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen

Unter einer Äquivalenzumformung einer Ungleichung verstehen wir eine Umformung, bei die Lösungsmenge der Ungleichung nicht verändert wird.

Bei den folgenden Äquivalenzumformungen wird das Ungleichheitszeichen **nicht gedreht**:

1. Termumformungen (Ausmultiplizieren, Zusammenfassen, Vereinfachen)
2. Auf beiden Seiten denselben Term addieren oder subtrahieren
3. Beide Seiten mit derselben **positiven** Zahl (>0) multiplizieren oder divieren

Bei der folgenden Äquivalenzumformung wird das Ungleichheitszeichen **gedreht**:

1. Beide Seiten mit derselben **negativen** Zahl (<0) multiplizieren oder durch dieselbe **negative** Zahl dividieren

Beispiel: $2x+5<7x-3$

Lösung:

Übungen

26. Bestimme die Lösungsmenge der Ungleichungen in **R**

a) $x+2.5 \leq -4$ b) $4+x \geq -2.5$ c) $2x \leq -3.5x-11$

d) $x>2x+1$ e) $9-x>-0.5x+1$ f) $-\frac{3}{4}x<\frac{1}{2}x$

g) $\frac{5-2x}{3}<0$ h) $(x+1)(x-3)>(x-4)^2$

i) $(x-3)(x+3)-(x-2)-(x-2)^2 \leq x-1$