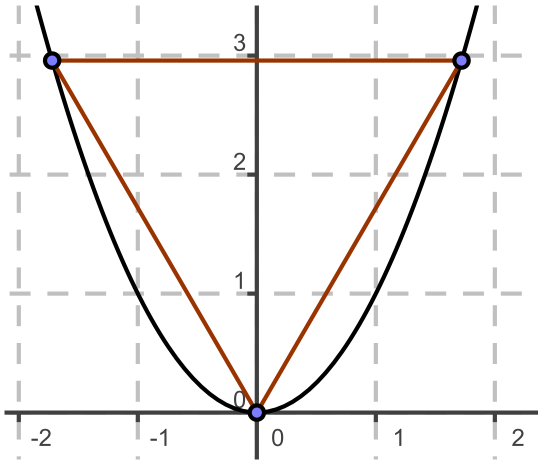
Lösungen zur Matur 2010

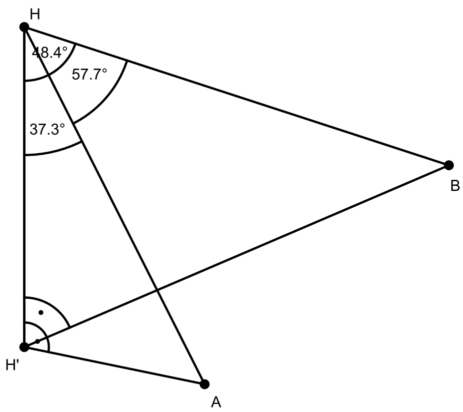
1. (8 P./20 Min.) Zwei unabhängige Teilaufgaben

   a) (4 P./10 Min.) Ein gleichseitiges Dreieck wird so in die Normalparabel $f(x) = x^2$ einbeschrieben, dass eine Ecke auf den Punkt (0|0) zu liegen kommt. Berechne die Seitenlänge des Dreiecks (Skizze dient nur zur Veranschaulichung).

   - a sei die Seitenlänge des Dreiecks, x sei die halbe Seitenlänge des Dreiecks.
   - $\sqrt{x^2+x^4} = 2x \Rightarrow x^2 + x^4 = 4x^2 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2-3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \pm\sqrt{3}$
   - $x = \sqrt{3} \Rightarrow \underline{\underline{a = 2\sqrt{3}}}$



   b) (4 P./10 Min.) Ein Ballon befindet sich an der Stelle H und liegt auf einer Höhe von 4.3km über Meer. Von ihm aus betrachtet man die beiden Ortschaften A und B, die auf derselben Meereshöhe liegen, unter den Tiefenwinkeln $\angle AHH' = 37.3°$ und $\angle BHH' = 48.4°$. H' liegt auf der gleichen Meereshöhe wie A und B. Weiter schliessen die Strecken HA und HB den Winkel 57.7° ein. Wie weit liegen A und B auseinander ?



- $\cos(37.3^\circ) = \frac{4.3}{\overline{HA}} \Rightarrow \overline{HA} = \frac{4.3}{\cos(37.3^\circ)}$
- $\cos(48.4^\circ) = \frac{4.3}{\overline{HB}} \Rightarrow \overline{HB} = \frac{4.3}{\cos(48.4^\circ)}$
- $\overline{AB}^2 = \left(\frac{4.3}{\cos(37.3^\circ)}\right)^2 + \left(\frac{4.3}{\cos(48.4^\circ)}\right)^2 - 2 \cdot \frac{4.3}{\cos(37.3^\circ)} \cdot \frac{4.3}{\cos(48.4^\circ)} \cdot \cos(57.7^\circ) \approx 33.75\,\text{km}^2$
  $\Rightarrow \underline{\underline{\overline{AB} \approx 5.4\,\text{km}}}$

2. (6 P./20 Min.)

   a) (2.5 P./8 Min.) In einer historischen Aufgabe wird berichtet: Kung-Fu hatte in seinem Teich mitten in der Nacht (0 Uhr) zum 1.April eine wundersame Lotusblume gesetzt, die jeweils während 24 Stunden auf die doppelte Fläche anwuchs. Genau 30 Tage nach dem Setzen bedeckte sie um Mitternacht den Teich vollständig. Welcher Teil des Teiches war am 30.April um 12 Uhr mittags bedeckt ?

      - $2x = x \cdot a^1 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow B(t) = x \cdot 2^t$
      - $100 = x \cdot 2^{30} \Rightarrow x = \frac{100}{2^{30}} \approx 9.31 \cdot 10^{-8}$
      - $\underline{\underline{B(29.5)}} = \frac{100}{2^{30}} \cdot 2^{29.5} \approx 70.71 \Rightarrow \underline{\underline{70.71\%}}$

   b) (1.5 P./4 Min.) Nehmen wir an, Kung-Fu hätte zum gleichen Zeitpunkt in einem zweiten Teich eine weitere Lotusblume gesetzt, die 0.01%. des Teiches bedeckt hätte. Diese Blume hätte jeweils nach 72 Stunden ihre Fläche verdoppelt. Nach welcher Zeit (in Stunden) wäre der Teich vollständig bedeckt gewesen ?

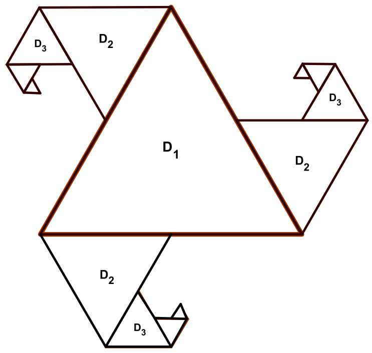
      - $0.02 = 0.01 \cdot a^{72} \Rightarrow a = \sqrt[72]{2} \approx 1.00967$
      - $100 = 0.01 \cdot \sqrt[72]{2}^t \Rightarrow t = \log_{\sqrt[72]{2}}(10000) \approx \underline{\underline{956.72\text{Stunden}}}$

   c) (2 P./8 Min.) Nach welcher Zeit (in Stunden) wäre bei beiden Teichen der prozentuale Anteil der bedeckten Fläche gleich gross gewesen ?

      - $\frac{100}{2^{30}} \cdot \sqrt[24]{2}^t = 0.01 \cdot \sqrt[24]{3}^t \Rightarrow t \approx \underline{\underline{601.64\text{ Stunden}}}$

3. (8 P./ 24 Min.) Zwei unabhängige Teilaufgaben:

   a) (4 P./ 12 Min.) Auf der untenstehenden Abbildung ist eine Dreiecksblume zu sehen, bei der alle Dreiecke gleichseitig sind. Das grösste Dreieck hat die Seitenlänge 2, beim Übergang zum nächst kleineren Dreieck wird die Seitenlänge halbiert. Die neu hinzukommenden Dreiecke werden mit $D_2, D_3, \ldots$ bezeichnet.



Berechne:

i) (1 P./ 3 Min.) **Berechne**: Welche Seitenlänge hat ein Dreieck D_{18} ?
  - $S_n = 2 \cdot 0.5^{n-1} \Rightarrow \underline{\underline{D_{18}}} = 2 \cdot 0.5^{18-1} \approx \underline{\underline{0.000015}}$

ii) (1 P./ 3 Min.) $N(D_n)$ bezeichne die Anzahl Dreiecke D_n. **Berechne**: $N(D_1) + N(D_2) + \ldots. + N(D_{15})$.
  - $\underline{\underline{A_n}} = 1 + 3(n-1) \Rightarrow A_{15} = 1 + 3(15-1) = \underline{\underline{43}}$

iii) (2 P./ 6 Min.) Wie gross ist die Fläche (als Grenzwert) der Dreiecksblume (die aus unendlich vielen Dreiecken besteht) ?
  - $A(D_1) = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 2^2}{4} = \sqrt{3}$
  - $3 \cdot A(D_2) = 3\dfrac{\sqrt{3} \cdot 1^2}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$
  - $3 \cdot A(D_3) = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 0.5^2}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$
  - $\underline{\underline{A(\text{D-Blume})}} = \sqrt{3} + \dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{1 - 0.25} \approx \underline{\underline{3.46}}$

b) (4 P./ 12 Min.) Ein Herr geht aus dem Wirtshaus nach Hause. Der Nachhauseweg beträgt 1000 Meter. Sein Hund läuft gleichzeitig vor, ist schneller und deshalb eher am Ziel, kehrt um und trifft seinen Herrn, der inzwischen natürlich weitergegangen ist. Der Hund läuft wieder in Richtung Heima, kehrt um usw. Zunächst liegt also noch eine Weglänge von 1000 Metern vor den beiden. Jedes Mal, wenn der Herr wieder auf den zurückkehrenden Hund trifft, beträgt seine Entfernung von zu Hause noch 60% des ursprünglichen Weges.

i) (2.5 P./ 8 Min.) Berechne, wie oft der Hund beim Haus angekommen ist, bevor das Zusammentreffen mit seinem Herrchen weniger als 5 Meter vom Haus entfernt ist.
  - $1000 \cdot 0.6^{n-1} = 5 \Rightarrow n - 1 = 11.37 \Rightarrow \underline{\underline{11\text{Mal}}}$

ii) (1.5 P./ 4 Min.) Berechne den Weg, den der Hund zurück legt, bis der Herr beim Haus ist.
  - $\dfrac{1000}{1-0.6} = 2500, \dfrac{600}{1-0.6} = 1500 \Rightarrow \underline{\underline{4000\,\text{m}}}$

4. (8 P./20 Min.) Gegeben sei der folgende gefälschte Würfel:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	0.1	0.2	0.3	0.1	0.1	0.2

a) (1 P./3 Min.) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 5 Würfen 5 gleiche Ziffern zu erhalten ?

- $3 \cdot 0.1^5 + 2 \cdot 0.2^5 + 1 \cdot 0.3^5 \approx \underline{\underline{0.0031}}$

b) (1 P./3 Min.) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 5 Würfen 2 Zweier und 3 Dreier zu erhalten ?

- $\binom{5}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.3^3 \approx \underline{\underline{0.0108}}$

c) (1.5 P./3 Min.) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 5 Würfen genau 2 Zweier zu erhalten ?

- $\binom{5}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^3 \approx \underline{\underline{0.2048}}$

d) (1 P./3 Min.) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 10 Würfen mindestens 4 Zweier zu erhalten ?

- $\underline{\underline{P(X \geq 4)}} = 1 - P(X \leq 3) = \underline{\underline{0.121}}$

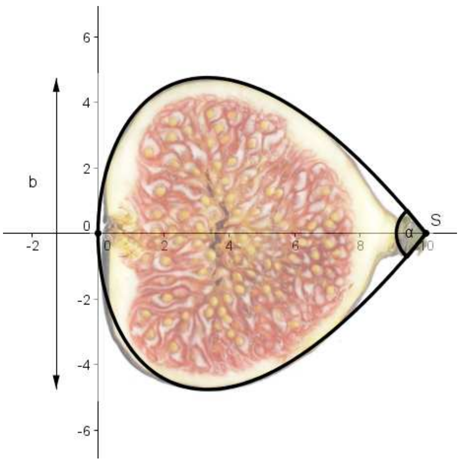
e) (1.5 P./4 Min.) Wie oft muss dieser Würfel mindestens geworfen werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einmal eine Zwei zu erhalten ?

- $P(\text{mind. eine Zwei}) = 1 - P(\text{keine Zwei}) = 1 - 0.8^n = 0.99 \Rightarrow n \approx 20.64 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{mindestens 21 Mal}}}$

f) (1.5 P./4 Min.) Jemand bietet Dir folgende Spiel an: Wenn Du eine Zahl würfelst, die kleiner als vier ist, dann erhälst du 10 Fr., andererseits musst Du 12 Fr. bezahlen. Zeige, dass dieses Spiel nicht fair ist. Wieviel müsstest Du bezahlen, damit das Spiel fair wird ?

- $0.6 \cdot 10 \neq 0.4 \cdot 12 \Rightarrow$ nicht fair
- $0.6 \cdot 10 = 0.4 \cdot x \Rightarrow x = 15 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{15 Franken}}}$

5. (6 P./20 Min.) Der TI-89 darf bei a) wie ein einfacher TR, bei b),c) und d) uneingeschränkt verwendet werden. Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = (3.3 - ax) \cdot \sqrt{1.4x}$ mit $a > 0$. Die Graphen der Funktionen $f_a(x)$ und $-f_a(x)$ können im entsprechenden Intervall als Rand einer Feige interpretiert werden. Der Ursprung bilde den Fusspunkt der Feige, der Punkt S die Spitze der Feige.



a) (1 P./4 Min.) Bestimme den Parameter a so, dass die Feige die Spitze $S(10|0)$ besitzt.

- $f_a(10) = (3.3 - a \cdot 10) \cdot \sqrt{14} = 0$
- $3.3 - 10a = 0 \Rightarrow 10a = 3.3 \Rightarrow \underline{\underline{a = 0.33}}$

b) (1.5 P./ 5 Min.) Bestimme für diesen Fall die Grösse des Winkels α an der Spitze S der Feige (falls Du bei a) nicht erhalten hast, rechne mit $a = 0.5$).

- $f_a'(x) = \dfrac{-1.77(ax - 1.1)}{\sqrt{x}}$
- $f_{0.33}'(10) = -1.23 \Rightarrow \tan^{-1}(-1.23) \approx -50.89°$
- $\underline{\underline{\alpha}} \approx 2 \cdot 50.89° \approx \underline{\underline{101.78°}}$

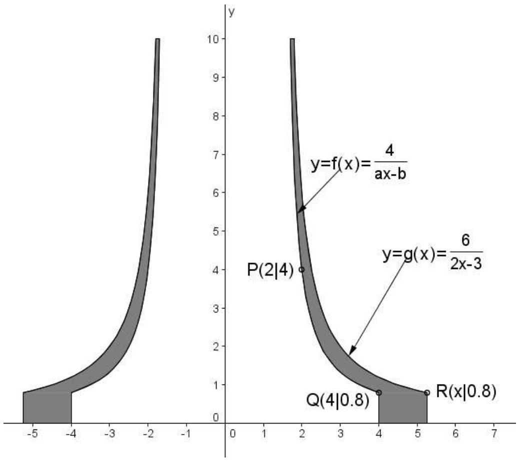
c) (1 P./ 3 Min.) Bestimme für den Fall $a = 1$ das Volumen der Feige.

- $f_1(x) = (3.3 - x) \cdot \sqrt{1.4x}$
- $V_x = \pi \displaystyle\int_0^{3.3} (3.3 - x)^2 \cdot \sqrt{1.4x}^2 \, dx = \underline{\underline{43.47}}$

d) (2.5 P./ 8 Min.) Bestimme den Parameter a so, dass die Breite der Feige an der breitesten Stelle $b = 8$ misst.

- $f_a'(x) = \dfrac{-1.77(ax - 1.1)}{\sqrt{x}} = 0$
- $ax - 1.1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1.1}{a}$
- $f(\dfrac{1.1}{a}) = 4 \Rightarrow (3.3 - 1.1) \cdot \sqrt{1.4 \cdot \dfrac{1.1}{a}} = 4 \Rightarrow 2.2 \cdot \sqrt{\dfrac{1.54}{a}} = 4 \Rightarrow 4.84 \cdot \dfrac{1.54}{a} = 16 \Rightarrow \underline{\underline{a}} = \dfrac{4.84 \cdot 1.54}{16} \approx \underline{\underline{0.47}}$

6. (6 P./ 25 Min.) Ein drehsymmetrischer Kühlturm ist 100 m hoch. Nebenstehende Skizze zeigt einen Schnitt längs der Rotationsachse (Längeneinheit: 10 m)



a) (2.5 P./ 7 Min.) Berechne die Parameter a und b der Funktion $f(x)$.

- $4 = \dfrac{4}{2a-b} \quad 0.8 = \dfrac{4}{4a-b}$
- $8a-4b=4 \quad 3.2a-0.8b=4$
- $8a-4b=4 \quad 16a-4b=20$
- $8a=16 \Rightarrow \underline{\underline{a=2}}$
- $16-4b=4 \Rightarrow -4b=-12 \Rightarrow \underline{\underline{b=3}}$

b) (3.5 P./ 15 Min.) Die integrate-Funktion des TI-89 darf verwendet werden. Berechne den Inhalt der Querschnittsfläche der Kühlturmwand (s. schraffierte Fläche).

- $10 = \dfrac{4}{2x-3} \Rightarrow 20x-30=4 \Rightarrow x=1.7$
- $10 = \dfrac{6}{2x-3} \Rightarrow 20x-30=6 \Rightarrow x=1.8$
- $\displaystyle\int_{1.7}^{4} \frac{4}{2x-3}\mathrm{d}x \approx 5.051$
- $\displaystyle\int_{1.8}^{5.25} \frac{6}{2x-3}\mathrm{d}x \approx 7.577$
- $0.1 \cdot 10 = 1$
- $7.577+1-5.051 \approx 3.526$
- $2 \cdot 3.526 \approx 7.05 \Rightarrow \underline{\underline{A \approx 705\,\mathrm{m}^2}}$