4.4 Differentialrechnung IV

Inhaltsverzeichnis

Differentialrechnung IV - Extremalprobleme

1 Extremalprobleme ohne Nebenbedingung

1.1 Beispiel

Gesucht ist eine positive reelle Zahl, für welche die Summe aus Quadrat und Kehrwert so klein wie möglich wird. [$x = 0.79$]

1.2 Übungen

Wenn nichts anderes steht, sind die Aufgaben ohne TI-NSpire zu lösen !

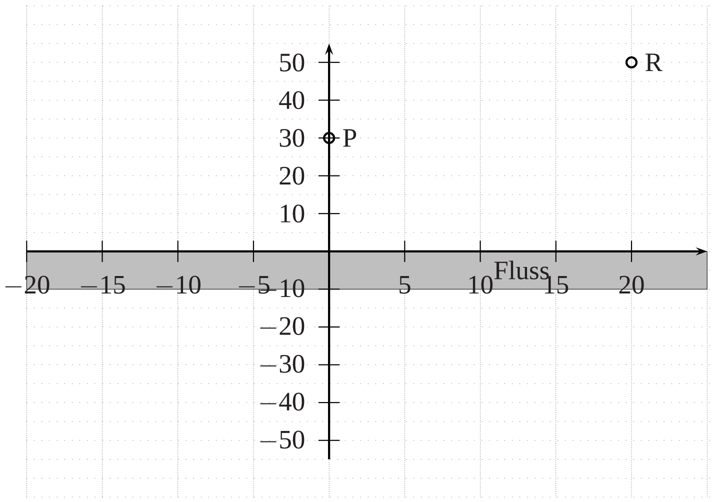
1. Ein Kugelstösser stösst eine Kugel. Die Flugbahn der Kugel lässt sich mit dem folgenden Gesetz beschreiben (wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird):

$$H(x) = -\frac{1}{35}x^2 + 0.5x + 1.5$$

   a) An welcher Stelle erreichte die Kugel die maximale Höhe und welche Höhe erreichte die Kugel an dieser Stelle ? [$x = 8.75\text{m}, H = 3.69m$]

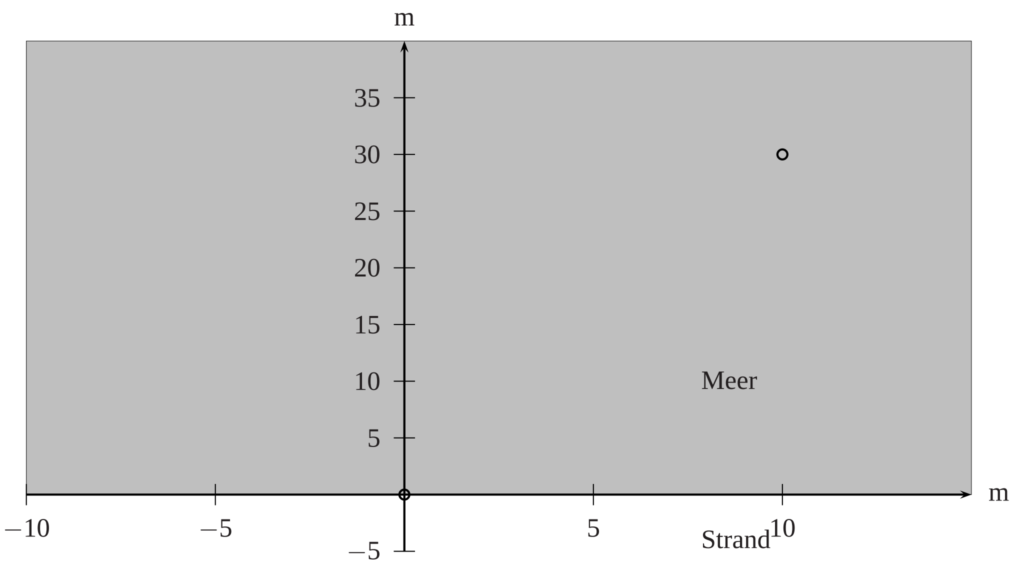
   b) Wie weit wurde die Kugel gestossen ? [20.11m]

2. Finde mit Konstruktion heraus: Ein Reiter befindet sich mit seinem Pferd an der Stelle P(0|30). Vor der Rückkehr zur Ranch R(20|50) möchte er sein Pferd noch am Fluss tränken.



   a) Finde mit Konstruktion heraus: An welcher Stelle S(...|0) (x-Achse) des Flusses muss er das Pferd tränken, damit der Gesamtweg PSR so kurz wie möglich wird ?
   b) mit TI-NSpire: Beantworte die Frage der Teilaufgabe a) mit Berechnung. [(7.5|0)]

3. mit TI-NSpire: Ein Mann geht mit seinem Hund spazieren und wirft von der Stelle (0|0) aus den Ball ins Wasser an die Stelle (10|30) (das Koordinatensystem ist in Metern skaliert). Der Hund rennt nun von (0|0) aus zuerst am Ufer entlang und springt dann ins Wasser. An welcher Stelle muss der Hund (Geschwindigkeit auf dem Land: 6.4 m/s, Geschwindigkeit im Wasser: 0.91 m/s) ins Wasser springen, um möglichst schnell beim Ball zu sein ? [(5.69|0)]



4. Die Anzahl Teilnehmer T an einem Velorennen hängt wie folgt von der Einschreibegebühr p ab:

$$T(p) = 500 - 4p$$

Dazu kommen Fixkosten von 4000 Fr. und 20 Fr. Unkosten pro Teilnehmer.

   a) Wie hoch ist der Gewinn, wenn die Einschreibegebühr $50 Fr.$ beträgt ? [5000 Fr.]

   b) Bei wievielen Teilnehmern wird der Gewinn maximal sein ? Wie hoch ist dann der Gewinn ? [210 Teilnehmer,7025 Fr.]

   c) Mit TI-NSpire: Wie hoch müssen die Einschreibegebühren mindestens sein, damit ein positiver Gewinn erzielt wird (gerundet auf den nächsthöheren Franken) ? [31 Fr.]

   d) Mit TI-NSpire: Wieviel dürfen die Einschreibegebühren höchstens betragen, damit noch ein positiver Gewinn erzielt wird (abgerundet auf den nächsttieferen Franken) ? [114 Fr.]

5. Bei einem quadratischen Stück Karton sollen an den Ecken vier kongruente Quadrate herausgeschnitten werden. Die Figur kann danach zu einer Schachtel gefaltet werden (die oben offen ist). Bestimme die Seitenlänge der Quadrate, wenn das Volumen der Schachtel maximal werden soll, wenn

   a) die Seitenlänge des Kartons 12 cm beträgt. [2 cm]

   b) die Seitenlänge des Kartons a beträgt. [$a/6$]

2 Extremalprobleme mit Nebenbedingungen

2.1 Beispiel aus der Algebra

Zerlege die Zahl 144 so in zwei Summanden, dass Ihr Produkt möglichst gross wird.

Übungen

6. Gesucht sind zwei positive Zahlen, deren Summe 6 und die Summe der Kehrwerte extremal wird. $[x = 3, y = 3]$

7. Wenn eine Autovermietungsfirma für einen Mietwagen einen Preis von 300F/Tag verlangt, kann sie 100 Autos vermieten. Wenn sie die Automiete pro Tag um 30F senkt, kann sie 5 Autos mehr vermieten, bei weiteren 30F Senkung werden wiederum 5 Autos mehr vermietet, usw.

   a) Wieviel Miete muss die Firma verlangen, damit die Gesamteinnahmen pro Tag möglichst hoch sind ? [450F]

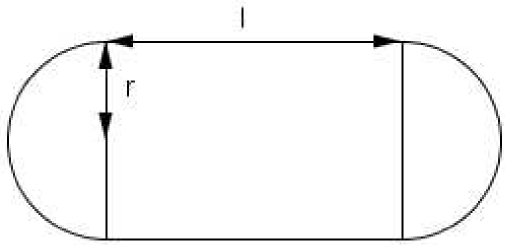
   b) Wie hoch wären in dem Fall die Tageseinnahmen ? [33750F]

2.2 Beispiel aus der ebenen Geometrie

Die Vorderansicht eines Torbogens ist ein Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis. Der Umfang des Torbogens beträgt 10m. Wie sind die Höhe h (entspricht der Höhe des Rechtecks) und der Radius r zu wählen, damit das Rechteck den maximalen Flächeninhalt besitzt ?

Übungen

8. Ein neuer Sportplatz mit einer $400m$ langen Laufbahn soll angelegt werden.

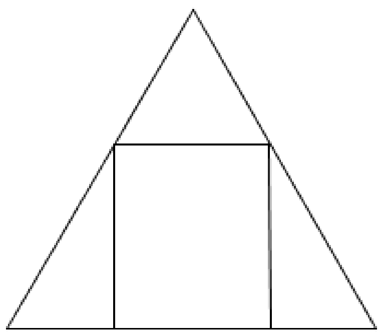


Der Innenraum, der aus einem Rechteck mit zwei angesetzten Halbkreisen besteht, soll so bemessen sein,

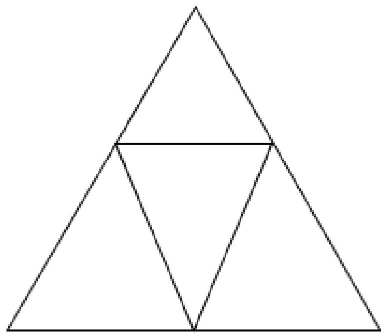
 a) dass der gesamte Innenraum den grösstmöglichen Flächeninhalt bekommt. $[r = 200/\pi, l = 0]$

 b) dass das Rechteck den grösstmöglichen Flächeninhalt bekommt. $[l = 100\,\text{m}, r = 31.83\,\text{m}]$

9. (mit dem TI-NSpire) In ein gleichseitiges Dreieck mit $a = 6\,\text{cm}$ kann man Rechtecke so einzeichnen, dass eine Seite auf der Grundseite des Dreiecks liegt und die übrigen beiden Ecken auf den anderen beiden Dreiecksseiten. Welches dieser Rechtecke besitzt den grössten Flächeninhalt ? $[x = 3\,\text{cm}, y = 2.60\,\text{cm}]$



10. (mit dem TI-Spire) In ein gleichseitiges Dreieck Δ_{gsei} mit $a = 10cm$ wird ein gleichschenkliges Dreieck Δ_{gsch} so eingezeichnet, dass die Spitze von Δ_{gsch} auf die Mitte einer Seite von Δ_{gsei} zu liegen kommt. Die beiden anderen Eckpunkte liegen auf je einer Seite (auf der nicht die Spitze liegt) von Δ_{gse}. Berechne die Masse des gleichschenkligen Dreiecks, das den grössten Flächeninhalt besitzt.
$[c = 5.00\,\text{cm}, y = 4.33\,\text{cm}]$

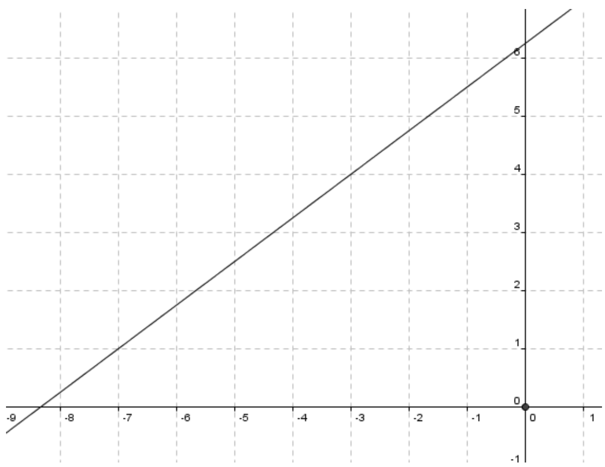


11. Bei einer Extremwertaufgabe sind die Höhe h und der Radius r einer Figur variabel, während der Flächeninhalt A, der sich aus h und r berechnen lässst, extremal werden soll. Welche der folgenden Funktionen eignen sich als Zielfunktion bzw. Nebenbedingung ?

    - Eine Funktion, die der Höhe h den Radius r zuordnet.
    - Eine Funktion, die der Höhe h den Flächeninhalt A zuordnet.
    - Eine Funktion, die dem Radius r den Flächeninhalt A zuordnet.
    - Eine Funktion, die dem Radius r die Höhe h zuordnet.

2.3 Beispiel aus der Koordinatengeometrie

Gegeben ist die Gerade $g: y = 0.75x + 6.25$. Bestimme jenen Punkt $P_0 \in g$, der vom Ursprung die kleinstmögliche Entfernung hat !

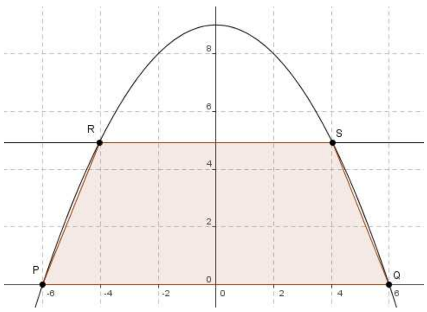


Übungen

12. Dem von der x-Achse sowie den Geraden $g_1 : 2x - y = 0$ und $g_2 : 3x + y - 30 = 0$ gebildeten Dreieck ist ein Rechteck mit dem grösstmöglichen Flächeninhalt einzubeschreiben. Bestimme die 4 Ecken dieses Rechtecks. $[A(3|0), B(8|0), C(8|6), D(3|6)]$

13. (mit dem TI-NSpire) Durch den Punkt $P = (4 \mid 2)$ soll eine Gerade g so gelegt werden, dass das mit den Koordinatenachsen gebildete Dreieck den kleinstmöglichen Inhalt hat. In welchem Punkt schneidet g die x-Achse und wie lautet die Gleichung von g ? $[(8|0), y = -0.5x + 4]$

14. Die Punkte $P = (6 \mid 0)$ und $Q = (-6 \mid 0)$ sind die Ecken eines gleichschenkligen Trapezes. Die anderen beiden Ecken R und S liegen auf der Parabel mit der Gleichung $y = -0.25x^2 + 9$. Man berechne die Koordinaten von R und S für den Fall, dass das Trapez PQRS maximalen Flächeninhalt hat ! $[R(-2|8), S(2|8))]$



2.4 Beispiel aus der räumlichen Geometrie

In einer Schokoladenfabrik sollen die Pralinen in Schachteln (oben geschlossen) mit quadratischer Grundfläche verpackt werden. Dabei soll die Schachtel eine Oberfläche von $100cm^2$ haben. Welche Kantenlängen hat diejenige Schachtel mit dem grössten Volumen ?

Übungen

15. (mit TI-NSpire) Welche Masse (in cm) besitzt der Zylinder grössten Rauminhalts, der in einen Kegel mit dem Grundkreisdurchmesser $d = 10\,\text{cm}$ und ebenso langen Mantellinien passt ? $[h_Z = 2.89\,\text{cm}, r_Z = 3.33\,\text{cm}]$

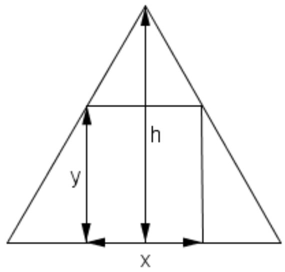
16. (mit TI-NSpire) Wie gross sind die Masse (Höhe, Radius) des volumenmässig grössten Zylinders, den man in eine Kugel (r_K=30cm) einbeschreiben kann ? $[h = 34.64\,\text{cm}, r_Z = 24.49\,\text{cm}]$

3 Hinweise zu den Aufgaben

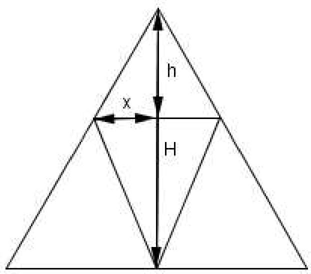
7. NB: $y = -6x + 900$ (Funktion 1.Grades, x: Anzahl vermietete Autos, y: Miete pro Autoc)

8. Für a) und b): NB: $400 = 2l + 2\pi r$

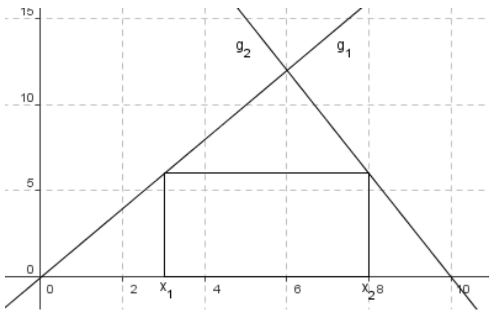
9. Strahlensatz liefert die NB: $\frac{3}{h} = \frac{x/2}{h-y}$



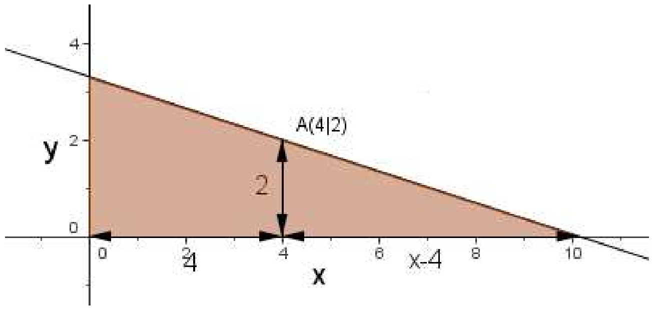
10. Strahlensatz liefert die NB (5:halbe Seitenlänge, H:Höhe des gleichseitigen Dreiecks, h:Höhe des gleichschenkligen Dreiecks): $\frac{5}{H} = \frac{x}{h}$



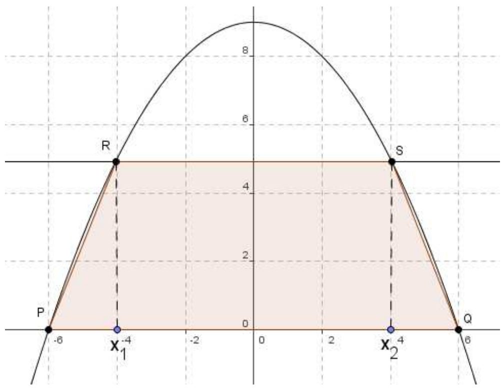
12. Hinweis: g_1 ist an der Stelle x_1 gleich hoch wie g_2 an der Stelle x_2.



13. Hinweis: $\frac{y}{2} = \frac{x}{x-4}$



14. Hinweis: Es gilt: $y(x_1) = y(x_2)$



15. Skizze wie bei A9: Strahlensatz liefert die NB (h_K:Höhe des Kegels,h_Z:Höhe des Zylinders,r_Z:Radius des Zylinders): $\frac{5}{h_K} = \frac{r_Z}{h_K - h_Z}$

16. Pythagoras