3.8 Wahrscheinlichkeitsrechnung III

Inhaltsverzeichnis

1 Zufallsgrössen

Wie wir bereits gelernt haben, kann man bei einem Zufallsversuch auf verschiedene Gesichtspunkte (Merkmale) achten. Nehmen wir als Beispiel dem Zufallsversuch, bei dem zwei Würfel geworfen werden.

- Wir achten auf die Summe der beiden Augenzahlen.
- Wir achten auf das Produkt der beiden Augenzahlen.
- Wir schauen, welcher Würfel die grössere Augenzahl hat.
- ...

Es ist mühsam, innerhalb einer Aufgabe immer ganze Sätze aufzuschreiben wie P(die Summe der beiden Augenzahlen)=... . Deshalb kommen hier wieder einmal Symbole ins Spiel. Einem Gesichtspunkt ordnen wir eine Zufallsgrösse (auch Zufallsvariable) zu. Wir machen das bei den oberen Gesichtspunkten:

- X_1: Wir achten auf die Summe der beiden Augenzahlen.
- X_2: Wir achten auf das Produkt der beiden Augenzahlen.
- X_3: Wir schauen, welcher Würfel die grössere Augenzahl hat und wie gross sie ist.

Die Notation wird jetzt deutlich vereinfacht:

- Die Summe der beiden Augenzahlen ist 8 $\rightarrow X_1 = 8$
- Das Produkt der beiden Augenzahlen ist 7 $\rightarrow X_2 = 6$
- Die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der beiden Augenzahlen 11 ist $\rightarrow P(X_1 = 11) = \ldots$

Übungen

1. Gib an, welche Werte bei der folgenden Zufallsgrösse auftreten können.
   a) X: Augensumme beim dreifachen Würfeln.
   b) X: Anzahl der Würfe mit Augenzahl 6 beim dreifachen Würfeln.
   c) X: Anzahl der Wappen beim fünffachen Münzwurf.
2. Betrachte die Zufallsgrösse X: Augensumme beim zweifachen Würfeln. Beschreibe folgende Ereignisse mit Hilfe der Zufallsgrösse X. Die Augensumme ist
   a) höchstens gleich 9
   b) grössergleich 6 aber kleinergleich 10
3. Ein fairer Würfel wird einmal geworfen. Es gelte: X : geworfene Augenzahl. Berechne
   a) $P(X = 2)$
   b) $P(X \leq 3)$

2 Der Erwartungswert

Einführungsaufgabe 1 „Noten“

Ein Schüler hat bei 10 gleichschweren Prüfungen die folgenden Noten geschrieben:

Note	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
Häufigkeit					1	2	5	2			

Er schreibt nun noch eine elfte Prüfung, die wiederum gleich schwer ist wie die vorderen zehn. Welche Note ist zu erwarten ?

Einführungsaufgabe 2 „Chuck-a-luck“

Bei dem Würfelspiel Chuck-a-luck[1] setzt der Spieler auf eine der Zahlen 1 bis 6. Danach wirft er drei Würfel. Enthält der Wurf die gesetzte Zahl 1-,2-,3-mal, so erhält der Spieler das 1fache, 2fache, 3fache seines Einsatzes (z.B. 1$) und seinen Einsatz zurück. Andernfalls verliert er seinen Einsatz an die Bank.

- Spiele dieses Spiel 30 Mal und notiere den Wurf in der untenstehenden Tabelle (X: Anzahl Treffer der gewählten Zahl). Wieviel gewinnst/verlierst Du im Schnitt pro Spiel ?

- Kann das Ergebnis der obigen Frage auch rechnerisch ermittelt werden ?

[1] to chuck = werfen, luck = Glück. Das Glücksspiel „Chuck-a-luck“ kommt aus den USA; in England nennt man es „crown and anchor“

Die Zahl, die den durchschnittlichen Gewinn/Verlust pro Spiel angibt, nennen wir **Erwartungswert**. Diese Zahl muss nicht zwangsläufig einen Gewinn oder Verlust darstellen, z.B. wäre es beim Würfeln einfach die durchschnittlich geworfene Augenzahl.

Definition 1 *Gegeben sei eine Zufallsgrösse X mit den Ergebnissen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Dann ist der Erwartungswert dieser Zufallsgrösse definiert mit $E(X) = \mu = \omega_1 \cdot P(\omega_1) + \omega_2 \cdot P(\omega_2) + \ldots + \omega_n \cdot P(\omega_n)$*

Beispiele

- Ein fairer Würfel mit den Augenzahlen von 1-6 wird geworfen, X : geworfene Augenzahl. $E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3.5$
- Ein fairer Würfel mit den Augenzahlen 1,2,4,5,5,6 wird geworfen, X : geworfene Augenzahl. $E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{2}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3.8\overline{3}$

Übungen

4. A und B vereinbaren ein Würfelspiel mit zwei Würfeln. Falls mindestens ein Würfel die Augenzahl 5 oder 6 zeigt, zahlt B an A 1 Fr, sonst zahlt A an B 1 Fr. Ist dies eine faire Spielregel ? [nein]

5. In einer Lotterie gewinnt man mit 5% der Lose 10 Fr, mit 10% 5 Fr und mit 20%1 Fr. Der Veranstalter will ohne Verlust auskommen, aber auch keinen Gewinn erzielen. Wieviel müssen die Lose kosten ? [1.20 Fr.]

6. Eine Videothek leiht von Freitag zu Montag verbilligt Videofilme aus. 12% der ausleihenden Jugendlichen (bis 21 Jahre) nehmen nur einen Film mit, 37% zwei Filme, 46% drei Filme und der Rest sogar 4 Filme.

   a) Berechne den durchschnittlichen Videokonsum pro Wochenende. [2.44 Filme]

   b) Aufgrund der Preisgestaltung verdient die Videothek bei der Ausleihe einer Kassette 2.40 Fr., bei zwei Kassetten 2.20 Fr., bei drei Kassetten 2 Fr. und bei vier Kassetten 1.80 Fr. (jeweils pro Kassette). Berechne den durchschnittlichen Gewinn bei einem Jugendlichen pro Wochenende. [5.04 Fr]

7. Ein Hersteller von Kaubonbons legt in jedes 5.Päckchen einen Gutschein für den kostenlosen Bezug eines weiteren Päckchens mit diesen Kaubonbons.

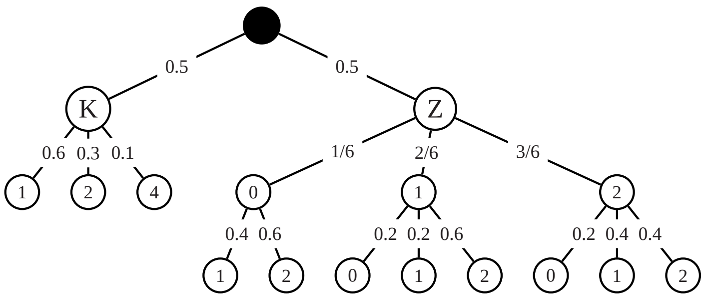
   a) Jemand kauft nun ein Päckchen. Stelle diese Situation mit einem Baumdiagramm dar. Beachte, dass in diesem Päckchen ein Gutschein sein kann und man dann sofort ein neues Päckchen erhält. Nimm an, dass in dieser Aufgabe jemand nach 5 Gutscheinen kein weiteres Päckchen mehr nimmt.

   b) Wir definieren die Zufallsgrösse Y:Anzahl Gutscheine (Wieder max. 5 Gutscheine,s.(b)). Bestimme den Erwartungswert von Y. [0.25]

8. Bei einem Spiel wirfst Du zuerst eine ideale Münze. Erscheint Kopf, so wirfst Du ein kleines Schweinchen aus Kunststoff. Das Schwein landet mit 60% Wahrscheinlichkeit auf der Seite und Du gewinnst

1 Franken. Landet das Schwein auf den Beinen (Wahrscheinlichkeit 30%), so gewinnst Du 2 Franken und landet das Schwein auf dem Rüssel (Wahrscheinlichkeit 10%), so gewinnst Du sogar 4 Franken.

Erscheint jedoch Zahl, so ziehst Du hintereinander und ohne Zurücklegen zwei Zettel aus einem Sack. Im Sack befinden sich sechs Zettel, einer mit Ziffer 0, zwei mit Ziffer 1 und drei mit der Ziffer 2 darauf. Du verlierst nun soviele Franken, wie das Produkt der beiden Ziffern beträgt. Den Baum haben wir schon einmal gezeichnet, er sieht folgendermassen aus:



Wir erhalten folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

X	+1	+2	+4	0	-1	-2	-4
$P(X)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

a) Wie viel wirst Du im Durchschnitt beim Spiel verlieren oder gewinnen, wenn Du sehr häufig spielst? [-0.033 Fr.]

b) Die Münze soll so gezinkt werden, dass das Spiel fair wird (d.h. der Erwartungswert soll 0 sein). Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss die Münze Kopf zeigen? [P(Kopf)=0.51,P(Zahl)=0.49]

3 Die Binomialverteilung

Wir betrachten nun eine Zufallsgrösse, die sehr häufig vorkommt. Voraussetzung ist ein Zufallsversuch, der nur zwei mögliche Ausgänge haben kann.

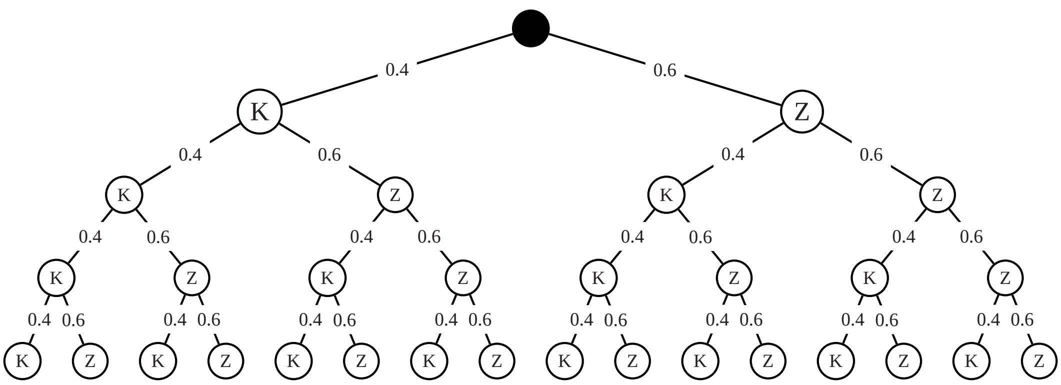
Definition 2 *Ein Zufallsversuch mit genau zwei möglichen Ergebnissen heisst Bernoulli-Versuch.*

Bemerkungen

- Diese Ergebnisse werden häufig als Erfolg bzw. Misserfolg bezeichnet.
- Ob ein Zufallsversuch ein Bernoulli-Versuch ist, hängt davon ab, auf welchen Gesichtspunkt wir schauen. Wenn wir beim Würfeln auf die Augenzahl schauen, liegt kein Bernoulli-Versuch vor, wenn wir dagegen auf gerade/ungerade schauen, liegt einer vor.

Einführungsaufgabe:

Münzwurf mit den Ausgängen Kopf oder Zahl. Die Wahrscheinlichkeit für Kopf betrage 0.4, die Wahrscheinlichkeit für Zahl betrage 0.6. Die Münze wird 4 mal geworfen.



Es sei X_K = Anzahl Kopf.

- $P(X_K = 0) =$
- $P(X_K = 1) =$
- $P(X_K = 2) =$
- $P(X_K = 3) =$
- $P(X_K = 4) =$

Zusatzfrage

- Wie gross ist $P(X_K = 4)$, wenn die Münze 10 mal geworfen wird ?

Satz 1 *Ein Bernoulliversuch werde n-Mal durchgeführt, wobei die Wahrscheinlichkeit für einen Erfolg p betrage. Die Zufallsgrösse X bezeichne die Anzahl Erfolge. Dann gilt:*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Eine solche Zufallsgrösse heisst **binomialverteilt**, eine solche Wahrscheinlichkeitsverteilung heisst **Binomialverteilung**.

Übungen

9. Ein fairer Würfel wird 10 mal geworfen. Dabei interessiert uns, ob die Zahl eine 5 oder keine 5 ist.
   a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand K5,K5,5,5,5,K5,K5,K5,K5,5 in genau dieser Reihenfolge würfelt ? [0.000258]
   b) Wieviele Pfade gibt es, die genau 4 mal eine 5 enthalten, wie beim obigen Pfad ? [210]
   c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 4 mal eine 5 gewürfelt wird ? [0.054]
10. Die Wahrscheinlichkeit für die Geburt eines Jungen bzw. eines Mädchens beträgt etwa 0.5. In einem Krankenhaus werden an einem Tag 12 Kinder geboren. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es genau 6 Jungen und 6 Mädchen sind ? [0.2256]
11. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem fairen Würfel bei 20 Würfen genau 5 mal die Augenzahl 3 oder 4 eintritt ? [0.146]
12. Ein Schüler hat als Ergebnis seiner Berechnungen folgenden Term erhalten:
$$P(X = 5) = \binom{12}{5} 0.1^5 \cdot 0.9^7$$
   Wie könnte die Aufgabenstellung gelautet haben ?
13. Bei einer Sorte von Werkstücken beträgt der Ausschussanteil 5%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird man in einer Zufallsstichprobe von 20 Stück weniger als 3 Fehlprodukte finden ? [0.925]
14. Ein Schüler „löst“ einen Multiple-Choise-Test mit 50 Fragen (4 Antwortmöglichkeiten, genau 1 Antwort ist richtig) mit vollständigem Raten. Ist es wahrscheinlicher, dass er genau 5 Fragen richtig beantwortet oder dass er genau 10 Fragen richtig beantwortet ? [P(5)=0.0049,P(10)=0.0985]

4 Die kumulierte Binomialverteilung

4.1 Die Tabelle im Fundamentum (oder Formeln und Tafeln)

Frage: Ein Münze werde 10 mal geworfen, P(K)=0.4 und P(Z)=0.6. X_K: Anzahl Kopf. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 2 mal Kopf auftritt ? Mathematisch geschrieben:

$P(X_K \leq 2) = ?$

Antwort:

$\underline{\underline{P(X_K \leq 2)}} = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \binom{10}{0} 0.4^0 \cdot 0.6^{10} + \binom{10}{1} 0.4^1 \cdot 0.6^9 + \binom{10}{2} 0.4^2 \cdot 0.6^8 = \underline{\underline{0.167}}$

Es ist klar, dass dieses Aufsummieren sehr aufwendig werden kann. Wenn beispielsweise $P(X_1 \leq 5)$ berechnet werden muss, dann hätten 6 Werte berechnet und aufsummiert werden müssen. Aus diesem Grunde wurden Tabellen erstellt, die uns diese Arbeit abnehmen. Wir wollen für unser Beispiel die Tabelle selber erstellen:

$k \leq$	$P(k)$	
0	$\binom{10}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^{10}$	0.006
1	$\binom{10}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^9$	0.046
2	$\binom{10}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^8$	0.167
3	$\binom{10}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^8 + \binom{10}{3} \cdot 0.4^3 0.6^7$	0.382
...	...	...
10	$\binom{10}{0} \cdot 0.4^0 \cdot 0.6^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.4^1 \cdot 0.6^9 + \ldots + \binom{10}{10} \cdot 0.4^{10} \cdot 0.6^0$	1

In einer Formelsammlung hat es nun mehrere Tabellen.

- Es gibt verschiedene Tabellen wegen der unterschiedlichen Anzahl Durchführungen einen Versuchs.
- Innerhalb einer Tabelle gibt es eine Unterteilung in horizontaler Richtung wegen den unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten für einen Treffer.

Übung

15. Wir haben eine Münze, die entweder Kopf oder Zahl zeigt. Die Zufallsvariable X ist folgendermassen definiert: X_K: Anzahl Kopf.
    a) Es sei $P(\text{Kopf}) = 0.2$ bei 10 Würfen. Bestimme mit dem FoTa $P(X_K \leq 3)$. [0.879]
    b) Es sei $P(\text{Kopf}) = 1/3$ bei 20 Würfen. Bestimme mit dem FoTa $P(X_K \leq 7)$. [0.661]

Wir kommen nun auf Fragestellungen zu sprechen kommen, die eine gewisse Vorarbeit erfordern, bevor man die Tabelle einsetzen kann.

4.2 Es steht $\geq$ statt $\leq$-Das Gegenereignis

Frage: Ein Münze werde 10 mal geworfen, P(K)=0.4 und P(Z)=0.6, X_K: Anzahl Kopf. $P(X_K \geq 8)$?

Wir haben das Problem, dass $\geq$ steht, wir aber nur $\leq$ nachschauen können. Mit dem Gegenereignis kommen wir weiter:

$X_K \geq 8$ beschreibt folgendes Ereignis:

- 8 mal Kopf
- 9 mal Kopf
- 10 mal Kopf

Das Gegenereignis zu $X_K \geq 8$ sind alle Ergebnisse, die von X_K nicht getroffen wurden. Das heisst:

- 0 mal Kopf
- 1 mal Kopf
- 2 mal Kopf
- 3 mal Kopf
- 4 mal Kopf
- 5 mal Kopf
- 6 mal Kopf
- 7 mal Kopf

Das Gegenereignis lautet somit: $X_K \leq 7$. Jetzt sehen wir die Idee: Beim Gegenereignis dreht sich das Ungleichheitszeichen.

- Wir können also notieren $P(X_K \geq 8) + P(X_K \leq 7) = 1$
- $\Rightarrow \underline{\underline{P(X_K \geq 8)}} = 1 - P(X_K \leq 7) = 1 - 0.988 = \underline{\underline{0.012}}$

Übung

16. Es liegt ein fairer Würfel mit den Zahlen von 1-6 vor. Wir haben die Zufallsvariable X_1: Anzahl Einsen
    a) Wie gross ist $P(X_1 \geq 10)$ bei 25 Würfen ? [0.005]
    b) Wie gross ist $P(X_1 \geq 5)$ bei 20 Würfen ? [0.231]

4.3 $p = 0.6$ lässt sich nicht finden - Der Umformulierungstrick

Es fällt auf, dass die Wahrscheinlichkeiten der Tabellen jeweils kleiner oder gleich 0.5 sind.

Frage: Ein Münze werde 10 mal geworfen, P(K)=0.4 und P(Z)=0.6. X_K: Anzahl Kopf, X_Z: Anzahl Zahl. $P(X_Z \geq 7) =?$

Es steht ein $\geq$-Zeichen da, wir nehmen also das Gegenereignis:

$P(X_Z \geq 7) = 1 - P(X_Z \leq 6)$

Problem: Wir finden $p = 0.6$ in der Tabelle nicht.

Lösung: Wir **formulieren** die vorgegebene Situation **um**.

$X_Z \geq 7$ bedeutet:

- 7 mal Zahl und 3 mal Kopf
- 8 mal Zahl und 2 mal Kopf
- 9 mal Zahl und 1 mal Kopf
- 10 mal Zahl und 0 mal Kopf

Dieses Ereignis kann auf zwei Arten formuliert werden:

- $X_Z \geq 7$ (wie in der Aufgabe)
- $X_K \leq 3$ (neue Formulierung)

Mit Hilfe der neuen Formulierung können wir die Aufgabe sofort lösen:

$P(X_Z \geq 7) = P(X_K \leq 3) = 0.382$

Übung

17. Es liegt ein fairer Würfel mit den Zahlen von 1-6 vor. Wir haben die Zufallsvariable X_1: Anzahl Würfe mit den Augen 3,4,5 oder 6.
    a) Wie gross ist $P(X_1 \geq 13)$ bei 20 Würfen ? [0.661]
    b) Wie gross ist $P(X_1 > 9)$ bei 25 Würfen ? [0.998]

4.4 Umformulierung und Gegenereignis in Kombination

Frage: Eine Münze werde 10 mal geworfen, P(K)=0.4 und P(Z)=0.6, X_K: Anzahl Kopf, X_Z: Anzahl Zahl. $P(X_Z \leq 4) = ?$

Das Ereignis $X_Z \leq 4$ umfasst:

- 0/1/2/3/4 mal Zahl
- $p = 0.6$ lässt sich nicht finden. Wir haben gelernt, dass wir in dieser Situation umformulieren müssen: $P(X_Z \leq 4) = P(X_K \geq 6)$
- Nun haben wir ein $\geq$, deshalb nehmen wir das Gegenereignis: $P(X_K \geq 6) = 1 - P(X_K \leq 5)$
- Wir können die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnen: $\underline{\underline{P(X_Z \leq 4)}} = P(X_K \geq 6) = 1 - P(X_K \leq 5) = 1 - 0.834 = \underline{\underline{0.166}}$

Übung

18. Ein Reisnagel wird geworfen. Er kann auf die Seite ($P(S) = 0.8$) oder auf den Kopf ($P(K) = 0.2$) fallen. Gegeben sei die Zufallsvariable X_S: Anzahl Seite.
    a) Berechne $P(X_S \leq 8)$ bei 20 Würfen. [0]
    b) Berechne $P(X_S \leq 7)$ bei 10 Würfen. [0.322]

4.5 Das Ereignis liegt dazwischen

Frage: Ein Münze werde 10 mal geworfen, P(K)=0.4 und P(Z)=0.6, X_K: Anzahl Kopf. Wie gross ist $P(3 \leq X_K \leq 5)$?

Wir können die Situation veranschaulichen:

○ ○ ○ ● ● ● ○ ○ ○ ○ ○

Folgende Wahrscheinlichkeiten können wir aus der Tabelle ablesen:

$P(X_K \leq 5)$:

● ● ● ● ● ● ○ ○ ○ ○ ○

$P(X_K \leq 2)$:

● ● ● ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Mit Hilfe der Zeichnung sehen wir leicht:

$\underline{\underline{P(3 \leq X_K \leq 5)}} = P(X_K \leq 5) - P(X_K \leq 2) = 0.834 - 0.167 = \underline{\underline{0.667}}$

Übung

19. Ein Münze ($P(Z) = \frac{1}{3}, P(K) = \frac{2}{3}$) wird 20 mal geworfen. Es sei X_K: Anzahl Kopf und X_Z: Anzahl Zahl.

    a) Wie gross ist $P(10 \leq X_Z \leq 15)$? [0.092]

    b) Wie gross ist $P(5 < X_Z < 15)$? [0.703]

    c) Wie gross ist $P(3 \leq X_Z < 12)$? [0.969]

    d) Wie gross ist $P(12 < X_K \leq 15)$? [0.509]

4.6 gemischte Übungen

20. Ein Rad mit 20 gleich grossen Sektoren (nummeriert von 1-20) wird 10 mal geworfen. Bestimme mit Hilfe des Tafelwerks die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

    a) 3 mal Sektor 4. [0.010]

    b) nie der Sektor 5. [0.599]

    c) mehr als 2 mal, aber weniger als 5 mal einer der Sektoren 5,6,7 oder 8. [0.289]

    d) 6 mal ein Sektor grösser oder gleich 16. [0.016]

21. Ein Multiple-Choice-Test besteht aus 25 Aufgaben, bei denen jeweils nur eine von fünf Antworten richtig ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beantwortet man durch blosses Raten

    a) mehr als 20 Aufgaben richtig ? [0.000]

    b) mindestens 10 und höchstens 20 Aufgaben richtig ? [0.017]

    c) weniger als 10 Aufgaben richtig ? [0.983]