3.6 Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Die Begriffe Wahrscheinlichkeit und Chance werden oft in der Umgangssprache gebraucht. Ein paar Beispiele:

- „Es ist sehr unwahrscheinlich, im Lotto zu gewinnen.“
- „Juventus Turin hat fast keine Chance mehr, um noch ein Unentschieden zu erreichen.“
- „Höchstwahrscheinlich wird Federer gegen Nadal verlieren.“

Wir benutzen Wörter wie höchstwahrscheinlich oder unwahrscheinlich mit der Absicht, eine Prognose auszudrücken. Solche qualitativen Ausdrücke sind jedoch für mathematische Berechnungen nicht brauchbar. In den folgenden Abschnitten werden wir sehen, wie diese Begriffe in der Mathematik gebraucht werden.

2 Zufallsversuche

Wie der Name schon sagt, hat ein Zufallsversuch etwas mit Zufall zu tun. Zufällig ist etwas, was nicht vorausgesagt werden kann. Die mathematische Definition:

Definition 1 *Kann man einen Versuch beliebig oft in der gleichen Weise wiederholen und gibt es für den Versuch wenigstens zwei mögliche zufällige Ausgänge, so heisst ein solcher Versuch* ***Zufallsversuch*** *(oder Zufallsexperiment).*

Beispiel

Wir werfen einen Würfel mit den Zahlen von 1-6 und schauen, welche Zahl oben liegt.

Wir können vor dem Wurf nicht voraussagen, welche Zahl oben liegen wird. Deshalb sprechen wir von einem Zufallsversuch.

Es kommen noch zwei weitere Begriffe ins Spiel:

Definition 2 *Ein möglicher Versuchsausgang heisst* ***Ergebnis*** *und wird mit ω bezeichnet.*

Definition 3 *Die Menge aller möglichen Versuchsausgänge heisst Ergebnisraum (Stichprobenraum) und wird mit Ω bezeichnet.*

Bezogen auf unser Beispiel:

- Die möglichen Ergebnisse: 1,2,3,4,5 oder 6
- Der Ergebnisraum Ω ist die Menge aller Ergebnisse, also : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Beachte: Der Ergebnisraum kann beim **gleichen Zufallsversuch verschieden** sein. Zum Beispiel kann der Zufallsversuch „*Ein Würfel wird einmal geworfen*“folgende Ergebnisräume haben (Es sind sogar noch mehr möglich):

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- $\Omega = \{G, UG\}$
- $\Omega = \{6, \text{ keine } 6\}$

Der Ergebnisraum hängt vom Beobachtungsmerkmal (worauf schauen wir ?) ab.

Schwieriger, weil irreführend, ist der Begriff **Ereignis**. Er hat nicht die gleiche Bedeutung wie der alltägliche Begriff. Im Alltag ist ein Ereignis etwas, was vorgefallen ist. In der Stochastik dagegen ist etwas anderes gemeint. Betrachten wir ein konkretes Beispiel:

Beispiel

Ein Würfel mit den Zahlen von 1-6 wird einmal geworfen.

Wir wissen bereits, dass der Ergebnisraum $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ist und die einzelnen Elemente (1,2,3,4,5,6) Ergebnisse heissen.

Wir können zum Beispiel auch die Frage stellen: Ist die gewürfelte Zahl grösser als 3 ? In diesem Falle schauen wir nicht nur ein einzelnes Ergebnis an, sondern mehrere zusammen. Dafür gibt es in der Stochastik den Begriff **Ereignis**. Diesen Begriff definieren wir folgendermassen:

Definition 4 *Eine Teilmenge des Ergebnisraums heisst **Ereignis**. Ereignisse kürzen wir mit Grossbuchstaben A,B,C,... ab.*

Bemerkung:

Der Begriff ist sehr allgemein gefasst. Auch Ergebnisse sind Ereignisse (einelementige Teilmengen des Ergebnisraums).

Es folgt noch ein weiterer wichtiger Begriff. Wir betrachten wiederum den fairen Würfel, mit dem Ereignis $A = \{3,4\}$. Die Menge der Elemente aus dem Ergebnisraum, die nicht getroffen wurden, heisst **Gegenereignis** von A, abgekürzt $\overline{A}$. Hier ist $\overline{A} = \{1,2,5,6\}$

Definition 5 *Gegeben sei ein Ereignis A im Ergebnisraum Ω. Dann heisst das Ereignis $\overline{A}$ Gegenereignis von A, wenn gilt:*

$$A \cup \overline{A} = \Omega \text{ und } A \cap \overline{A} = \emptyset$$

Übungen

1. Gib bei den folgenden Zufallsversuchen den Ergebnisraum Ω an.

   a) In einer Urne befinden sich 3 weisse, 4 schwarze und 5 blaue Kugeln. Eine Kugel wird nun gezogen. Wir schauen auf die Farbe der Kugel.

   b) In einem Tennisverein werden die Mitglieder folgendermassen eingeteilt: weiblich/männlich, junior/aktiv/senior. Bei einer Preisverleihung wird ein Mitglied gezogen.

      i) Wir schauen aufs Geschlecht und die Alterskategorie.

      ii) Wir schauen nur aufs Geschlecht.

   c) Eine kleine und eine grosse Münze werden gleichzeitig geworfen.

      i) Wir schauen auf beide Münzen.

      ii) Wir schauen, ob zweimal Kopf geworfen wurde.

   d) Aus allen Schweizer Familien mit drei Kindern wird eine Familie ausgelost und die Geschlechtsverteilung der Kinder notiert.

2. Ein Würfel mit den Augenzahlen von 1-6 wird geworfen. Entscheide, ob es sich bei den folgenden Sätzen um ein Ergebnis handelt. Gib jeweils das Gegenereignis an.

   a) Die geworfene Augenzahl beträgt 3.

   b) Die geworfene Augenzahl ist kleiner als 3.

   c) Die geworfene Augenzahl ist grösser als 5.

   d) Die geworfene Augenzahl ist 3 oder 4.

   e) Die geworfene Augenzahl ist gerade.

3. Ein Glücksrad mit den Zahlen 1-10 wird gedreht. Formuliere die folgenden Ereignisse und die dazugehörigen Gegenereignisse in Worten:

   a) $\{4,5\}$

   b) $\{1,2,3,4\}$

3 Der Wahrscheinlichkeitsbegriff

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist uns aus dem Alltag geläufig (s. einführender Abschnitt). In diesem Abschnitt wollen wir nun den Begriff der Wahrscheinlichkeit mathematisch fassen. Machen wir dazu ein Experiment mit einem Würfel.

Die untenstehende Tabelle zeigt die Ergebnisse einer Serie von Würfen mit einem Würfel der Zahlen 1-6. Dabei bedeutet n die Anzahl Würfe, $a_n(g)$ die absolute Häufigkeit von geraden Zahlen (wie oft wurde eine gerade Zahl geworfen) und $h_n(g) = \frac{a_n(g)}{n}$ die relative Häufigkeit des Ergebnisses „gerade Zahl“ in n Versuchen (Anteil der geraden Zahlen im Vergleich zu der Anzahl der Würfe).

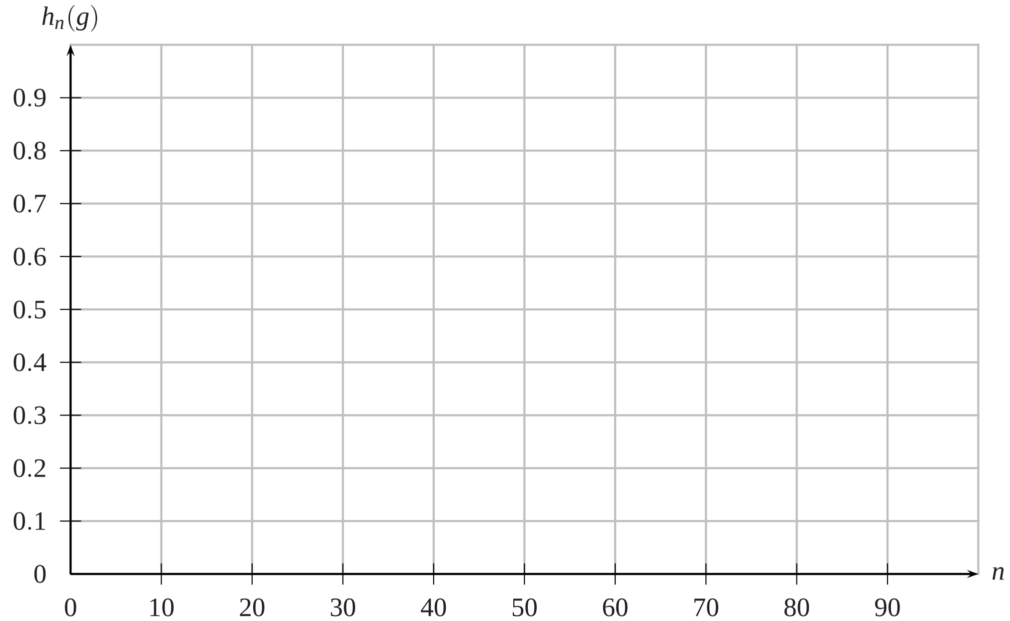
Beispiel

In 100 Würfen wurde 47 Mal eine gerade Zahl geworfen. Dann ist:

$$a_{100}(g) = 47, h_{100}(g) = \frac{47}{100} = 0.47$$

Fülle nun die untenstehende Tabelle aus und trage Deine Werte anschliessend in das Koordinatensystem ein.

gewürfelte Zahl										$a_n(g)$	$h_n(g)$
6	4	5	2	3	2	3	3	5	6	5	0.5
3	3	4	6	5	3	1	5	2	6	9	0.45



Die relative Häufigkeit $h_n(g)$ des Ergebnisses „gerade Zahl“stabilisiert sich nach anfänglichen Schwankungen und nähert sich mit wachsender Versuchszahl n dem Wert 0.5. Die Stabilisierung der relativen Häufigkeit mit wachsender Versuchszahl bezeichnet man als das **empirische Gesetz der grossen Zahlen**. Es wurde von Jakob Bernoulli 1688 entdeckt. Den **Stabilisierungswert** der relativen Häufigkeit eines Ergebnisses bezeichnet man als **Wahrscheinlichkeit** des Ergebnisses. Die Wahrscheinlichkeit wird abgekürzt mit P (probability). Dieser Stabilisierungswert lässt sich meist mit Hilfe der Geometrie des Versuchsobjektes berechnen (Würfel,Münze,Glücksrad) oder mit der Anzahl der vorhandenen Objekte (Topf mit 3 grünen und 2 blauen Kugeln,...).

Bei unserem Beispiel betragen diese Stabilisierungswerte sowohl für die geraden Zahlen als auch für die ungeraden Zahlen 0.5 (P(g) = 0.5 und P(ung) = 0.5). Wir können sicher sagen:

- Die Wahrscheinlichkeit von jedem Ergebnis liegt zwischen ....

- Die Wahrscheinlichkeit von allen Ergebnissen aufsummiert ergibt ...

Jetzt wollen wir noch etwas weiteres beobachten ($a_{100}(1)$ ist die absolute Häufigkeit der Zahl 1):

$a_{100}(1)$	
$h_{100}(1)$	
$a_{100}(2)$	
$h_{100}(2)$	
$a_{100}(1 \text{ oder } 2)$	
$h_{100}(1 \text{ oder } 2)$	

Wir beobachten:

Definition 6 *Gegeben sei ein Zufallversuch mit dem Ergebnisraum* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. *Eine Zuordnung P, die jedem Ergebnis* ω_i *genau eine reelle Zahl (die Wahrscheinlichkeit) zuordnet, heisst Wahrscheinlichkeitsverteilung, wenn folgende Bedingungen gelten:*

- $0 < P(\omega_i) < 1$, *für* $1 \leq i \leq n$
- $P(\omega_1) + ... + P(\omega_n) = 1$
- $E = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k\}$ *sei ein beliebiges Ereignis. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit von* E*:*

  $$P(E) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + ... + P(\omega_k)$$

Der Funktionswert $P(\omega_i)$ *heisst dann Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses* ω_i.

Beispiel

Wir haben ein Kartenspiel mit 36 Karten. Es wird nun eine Karte gezogen und wir interessieren uns dafür, welche es ist. Dann gilt:

- P(beliebige Karte) = $\frac{1}{36}$, die Wahrscheinlichkeit liegt also zwischen 0 und 1 (Punkt 1 der Definition).
- P(Karte 1)+P(Karte 2)+...+P(Karte 36) = $\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + ... + \frac{1}{36} = 36 \cdot \frac{1}{36} = 1$ (Punkt 2 der Definition).
- P(Karte 1 oder Karte 7) = P(Karte 1)+P(Karte 7) = $\frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ (Punkt 3 der Definition).

Übungen

4. Liegt in der untenstehenden Tabelle eine Wahrscheinlichkeitsverteilung vor ?

Z	1	2	3
P	1/4	1/3	1/2

5. Beim Roulettespiel bleibt die Kugel auf einem der 37 gleichgrossen Sektoren stehen. Je 18 Felder sind rot bzw. schwarz, das Feld mit der Zahl 0 ist grün. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel
   a) auf dem Feld mit der 17 stehenbleibt ?
   b) auf einem schwarzen Feld stehenbleibt ?
6. In einer Lostrommel befinden sich der Haupttreffer (H), 6 Gewinne (G), 20 Trostpreise (T) und 13 Nieten (N), wobei die Gewinne, Trostpreise und Nieten nicht unterschieden werden. Isabelle ist Glücksfee und zieht ein Los. Bestimme den Ergebnisraum Ω und gibt für jedes Ergebnis ω die zugehörige Wahrscheinlichkeit an.
7. Ein Schlaumeier manipuliert einen fairen Spielwürfel, indem er aus der Drei durch Hinzufügen von zwei weiteren Augen eine Fünf macht. Nun wird der Würfel einmal geworfen.
   a) Bestimme den Ergebnisraum und gib für jedes Ergebnis die zugehörige Wahrscheinlichkeit an.
   b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Die Augenzahl ist grösser als 4 “
   c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Die Augenzahl ist nicht 5 “
   d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Die Augenzahl ist gerade “
8. Zwei unterscheidbare Münzen werden gleichzeitig geworfen. Jede zeigt entweder „Kopf“ K oder „Zahl“ Z an.
   a) Bestimme Ω und gib für jedes Ergebnis die zugehörige Wahrscheinlichkeit an.
   b) Berechne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „KK oder ZZ “
   c) Berechne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „mindestens ein K “.

   [b) 0.5;c) 0.75]
9. In einem Gefäss liegen 4 schwarze, 6 rote und 8 blaue Kugeln. Claudio zieht, ohne hinzusehen, eine Kugel. Das Ergebnis dieses Zufallsexperimentes ist somit die Farbe der gezogenen Kugel. Berechne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „die Farbe ist nicht blau “.

4 Der Laplace-Zufallsversuch (oder Laplace-Experiment)

Definition 7 *Ein Zufallsversuch heisst Laplace-Zufallsversuch, wenn **alle Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit** haben.*

Beispiel: Ein fairer Würfel (fair bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, geworfen zu werden, für jede Zahl gleich gross ist) wird einmal geworfen.

Wir erhalten folgende Tabelle (**Wahrscheinlichkeitsverteilung**)

AZ	1	2	3	4	5	6
P(AZ)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Bemerkungen:

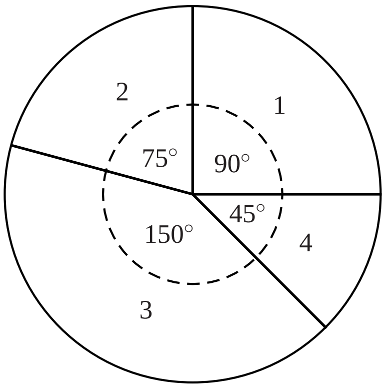
- Alle Wahrscheinlichkeiten sind gleich gross, deshalb handelt es sich um einen Laplace-Versuch. Eine solche Verteilung der Wahrscheinlichkeiten wird **Gleichverteilung** oder **Laplace-Verteilung** genannt.
- Die Summe von allen Wahrscheinlichkeiten ergibt 1.
- z.B. gilt: $P(\text{eine 3 oder eine 5 wird gewürfelt}) = P(\text{eine 3 wird gewürfelt}) + P(\text{eine 5 wird gewürfelt}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (in diesem Falle ist das Ereignis „eine 3 oder eine 5 wird gewürfelt“) ist also die Summe der Wahrscheinlichkeiten der dazugehörigen Ergebnisse.
- Bei einem Laplace-Experiment lässt sich eine Wahrscheinlichkeit vereinfacht folgendermassen berechnen:

  $$P(E) = \frac{\text{Anzahl der zu E gehörigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl von allen möglichen Ergebnissen}} = \frac{\text{günstige Fälle}}{\text{mögliche Fälle}}$$

  Wir übertragen diese Formel auf unser Beispiel:

  $$P(\text{eine 3 oder eine 5 wird gewürfelt}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Beachte, dass obige Formel nur bei Laplace-Versuchen gilt ! Überzeugen wir uns davon mit folgendem Beispiel. Untenstehendes Glücksrad wird einmal gedreht:



Wir erhalten folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung

Z	1	2	3	4
P(Z)				

Wir beobachten:

- Wenn wir alle Wahrscheinlichkeiten miteinander addieren, erhalten wir 1.
- Wieder können die Wahrscheinlichkeiten addiert werden, z.B.:
  $P(1 \text{ oder } 4) = P(1) + P(4) = \frac{90}{360} + \frac{45}{360} = \frac{135}{360}$
- Was im Gegensatz zum Würfelversuch (oder allgemein im Gegensatz zu einem Laplace-Versuch) nicht mehr geht, ist die Formel P = günstige Fälle/mögliche Fälle. Wir würden 2/4 erhalten (2 für die günstigen Fälle 1 und 4, 4 weil es die vier möglichen Fälle 1,2,3,4 gibt), was offensichtlich falsch ist.

Übungen

10. Entscheide, ob eine Laplace-Verteilung vorliegt.
    a) Roulettespiel, wir schauen auf welcher Farbe die Kugel zu stehen kommt.
    b) Ein Spielwürfel mit den Augenzahlen 1,2,4,5,5,6. Wir schauen, welche Zahl gewürfelt wird.
    c) Ein Spielwürfel mit den Augenzahlen 1,2,4,5,5,6. Wir schauen, ob die gewürfelte Zahl gerade oder ungerade ist.
    d) Ein Spielwürfel mit den Augenzahlen 1,2,4,5,5,6. Wir schauen, ob die gewürfelte Zahl grösser 4 ist.
    e) Zwei faire unterscheidbare Münzen werden geworfen. Wir schauen, welche zwei Bilder liegen (KK, KZ, ZK, ZZ).
    f) In einem Gefäss liegen 4 schwarze, 6 rote und 8 blaue Kugeln. Eine Kugel wird gezogen. Wir schauen auf die Farbe der Kugel.
    g) Schweizer Lottospiel (6 aus 45). Wir schauen, welche Zahlen gezogen wurden.
    h) Aus einem Jasskartenspiel wird eine Karte gezogen. Wir schauen auf die Farbe (Eichel, Schellen, Schaufel, Rose) der Karte.
    i) Aus einem Jasskartenspiel wird eine Karte gezogen. Wir schauen auf die „Höhe“(Neun, Ass,...) der Karte.
    j) Ein blauer und ein roter Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wir schauen auf die Summe der beiden Augenzahlen.

11. Wir greifen aus einem Jasskartenspiel (36 Karten, 4 Farben) eine Karte heraus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft das folgende Ereignis ein ?
    a) Eine Eichelkarte wird gezogen.
    b) Das Rosenass wird gezogen.
    c) Ober oder König wird gezogen.

12. Beim Schweizer Lotto werden aus 45 Zahlen deren 6 gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,
    a) sechs richtige Zahlen anzukreuzen ? [0.00000012]
    b) fünf richtige Zahlen anzukreuzen ? [0.00002873]
    c) vier richtige Zahlen anzukreuzen ? [0.00136463]
    d) drei richtige Zahlen anzukreuzen ? [0.02244060]
    e) zwei richtige Zahlen anzukreuzen ? [0.15147402]
    f) eine richtige Zahl anzukreuzen ? [0.42412726]
    g) keine richtige Zahl anzukreuzen ? [0.40056463]
13. Ein Jasskartenspiel besteht aus 36 Karten. Ein Spieler erhält nun 9 Karten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler
    a) alle vier Bauern hat ? [0.00214]
    b) drei Damen hat ? [0.03850]
    c) keinen König hat ? [0.29794]
    d) zwei Bauern und zwei Asse hat ? [0.037582]
14. Ein Pokerspiel enthält 52 Karten. Bei der Pokervariante Five Card draw erhält ein Spieler 5 Karten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler
    a) ein Royalflash (Ass, König, Dame, Bube, Zehn der gleichen Farbe) hat ? [0.0000015]
    b) ein Fullhouse (ein Drilling und ein Zwilling) hat ? [0.0014406]
    c) einen Doppelzwilling (zwei Zwillinge) hat ? [0.0475390]
    d) einen Drilling hat (die verbleibenden zwei Karten dürfen kein Zwilling sein) ? [0.0211285]

5 Die Komplementärregel

Ein blauer und ein roter Würfel werden geworfen. Folgende Ergebnisse sind möglich:

(1 1)	(1 2)	(1 3)	(1 4)	(1 5)	(1 6)
(2 1)	(2 2)	(2 3)	(2 4)	(2 5)	(2 6)
(3 1)	(3 2)	(3 3)	(3 4)	(3 5)	(3 6)
(4 1)	(4 2)	(4 3)	(4 4)	(4 5)	(4 6)
(5 1)	(5 2)	(5 3)	(5 4)	(5 5)	(5 6)
(6 1)	(6 2)	(6 3)	(6 4)	(6 5)	(6 6)

- Wir betrachten folgendes Ereignis: A = „zwei verschiedene Zahlen werden geworfen“ ? Umrande alle Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören, mit einer Farbe. Berechne anschliessend P(A).

- Wir betrachten folgendes Ereignis: B = „zwei gleich Zahlen werden geworfen“ ? Umrande alle Ergebnisse, die zu diesem Ereignis gehören, mit einer anderen Farbe. Berechne anschliessend P(B).
- Wie hängen die Ereignisse A und B zusammen ?
- Wie hängen P(A) und P(B) zusammen ?

Wir notieren die **Komplementärregel**:

Satz 1 *Es liege ein Zufallsversuch vor, dazu das Ereignis A dieses Zufallsversuchs und das dazugehörige Gegenereignis $\overline{A}$. Dann gilt:*

Übungen

15. Ein blauer und ein roter Würfel werden geworfen (s. Tabelle). Berechne mit der Komplementärregel die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

    a) „Die Augensumme ist kleiner als 9“ [13/18] b) „Die Augensumme ist grösser als 4“ [5/6]

16. Drei unterscheidbare faire Würfel werden geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme kleiner als 16 ist ? [206/216=0.954]

17. Ein Jasskartenspiel besteht aus 36 Karten, ein Spieler erhält 9 Karten, Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler nicht alle 4 Asse in den Händen hält ? [0.999]

18. Jeder Schüler einer Klasse schreibt eine Zahl zwischen 1 und 100 auf. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

    a) bei Deiner Klasse mindestens zwei Schüler die gleiche Zahl aufgeschrieben haben ?
    b) bei einer Klasse mit n Schülern mindestens zwei Schüler die gleiche Zahl aufgeschrieben haben ?

19. **Das Geburtstagsproblem**: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

    a) in Deiner Klasse mindestens 2 Schüler am gleichen Tag Geburtstag haben ?
    b) in einer Klasse mit n Schülern mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag haben ?

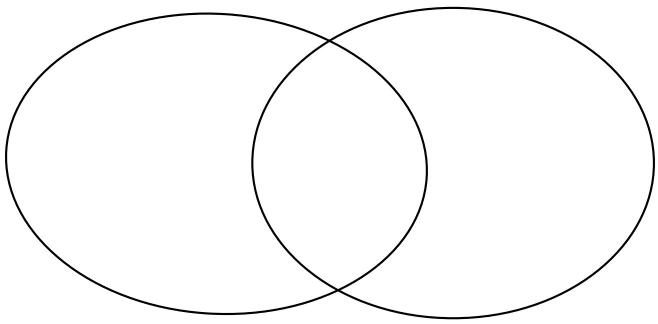
6 Die Summenregel

Einführungsaufgabe

Aus einer Urne mit 20 gleichen Kugeln, die von 1 bis 20 nummeriert sind, wird eine Kugel zufällig gezogen. Fülle die untenstehende Tabelle aus:

Ereignis	Eigenschaft	Ergebnisse	Wahrscheinlichkeit
A	Die Zahl ist durch zwei teilbar	2,4,6,8,10,12,14,16,18,20	
B	Die Zahl ist durch drei teilbar	3,6,9,12,15,18	
C	Die Zahl ist durch zwei oder drei teilbar	2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20	
D	Die Zahl ist durch 2 und durch 3 teilbar	6,12,18	

Zeichne die Ereignisse A und B in die untenstehenden Mengendiagramme:



- Lässt sich eine Gleichung aufstellen mit P(A),P(B),P(C) und P(D) ?

Satz 2 *Gegeben sei eine Zufallsversuch. Dann gilt für zwei Ereignisse A und B dieses Zufallsversuchs die folgende Beziehung:*

Übungen

20. Wir greifen aus einem Jasskartenspiel (36 Karten, 4 Farben) eine Karte heraus. Berechne mit Hilfe der Summenformel jeweils die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse.

a) Schaufelkarte oder König [1/3]
b) Rosenkarte oder eine Karte höher als die Bauernkarte (Dame, König, Ass) [1/2]
c) Ober oder König [2/9]

21. Ein blauer und ein roter Würfel werden gleichzeitig geworfen. Berechne mit Hilfe der Summenformel die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

(1 1)	(1 2)	(1 3)	(1 4)	(1 5)	(1 6)
(2 1)	(2 2)	(2 3)	(2 4)	(2 5)	(2 6)
(3 1)	(3 2)	(3 3)	(3 4)	(3 5)	(3 6)
(4 1)	(4 2)	(4 3)	(4 4)	(4 5)	(4 6)
(5 1)	(5 2)	(5 3)	(5 4)	(5 5)	(5 6)
(6 1)	(6 2)	(6 3)	(6 4)	(6 5)	(6 6)

a) „Der eine oder andere Würfel zeigt Augenzahl grösser als 4.“ [5/9]

b) „Der eine oder andere Würfel zeigt eine gerade Augenzahl.“ [3/4]

22. Ein Jasskartenspiel besteht aus 36 Karten. Davon werden 9 Karten an einen Spieler verteilt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler

a) genau 3 Asse oder genau 3 Könige in den Händen hält ? [$\approx$ 0.076]

b) genau einen Buben oder genau eine Dame in den Händen hält ? [$\approx$ 0.693]

7 Lösungen

1. a) $\Omega = \{w, s, b\}$
   b) i) $\Omega = \{wj, wa, ws, mj, ma, ms\}$
      ii) $\Omega = \{w, m\}$
   c) i) $\Omega = \{Kk, Kz, Zk, Zz\}$
      ii) $\Omega = \{Kk, \text{nicht } Kk\}$
   d) $\Omega = \{KKK, KKM, KMM, MMM\}$
2. a) ja; die geworfene AZ ist keine 3
   b) nein; die geworfene AZ ist grösser als 2
   c) ja; die geworfene AZ ist kleiner als 6
   d) nein; die geworfene AZ ist weder 3 noch 4
   e) nein; die geworfene AZ ist ungerade
3. a) Eine 4 oder 5 wird gedreht
   b) Eine Zahl kleiner 5 wird gedreht
4. nein, weil die Summe der Wahrscheinlichkeiten nicht 1 ergibt
5. a) P(auf 17) = 1/37 b) P(auf schwarz) = 18/37
6. $\Omega = \{H, G, T, N\}; P(H) = 1/40 = 0.025, P(G) = 6/40 = 0.15, P(T) = 20/40 = 0.5, P(N) = 13/40 = 0.325$
7. a)

AZ	1	2	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	2/6	1/6

   b) $P(AZ > 4) = 3/6 = 0.5$
   c) $P(AZ \neq 5) = 4/6 = 2/3$
   d) $P(\text{AZ gerade}) = 3/6 = 0.5$
8. a)

	KK	KZ	ZK	ZZ
P	1/4	1/4	1/4	1/4

   b) $P(\text{KK oder ZZ}) = 1/4 + 1/4 = 0.5$
   c) $P(\text{mind. ein K}) = 1/4 + 1/4 + 1/4 = 0.75$
9. P(Die Farbe ist nicht blau) = 5/9
10. a) nein
    b) nein
    c) ja
    d) ja
    e) ja

f) nein
g) ja
h) ja
i) ja
j) nein

11. a) 0.25
b) $1/36$
c) $2/9$