3.3 Beschränktes(r) Wachstum/Zerfall und logistisches Wachstum

Inhaltsverzeichnis

1 Beschränktes Wachstum und beschränkter Zerfall

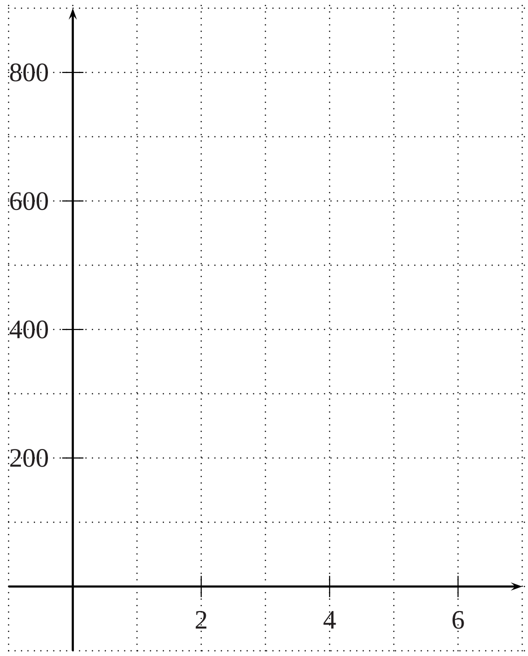
Wachstumsprozesse - ob in Natur, Gesellschaft und Wirtschaft - sind beschränkt. Die Schranken ergeben sich in der Natur z.B. durch Futtervorräte und endliche Lebensräume, in der Wirtschaft durch endliche Rohstoffe und Ressourcen oder einen nachlassenden Bedarf. Durch die Schranken des Wachstums ist den Bestandsfunktionen meist eine Grenze K (Kapazität) gesetzt, die sie nicht übersteigen können. Bei einem solchen Wachstum handelt es sich um **beschränktes Wachstum**. Mit dem folgenden Beispiel wollen wir herausfinden, wie wir beschränktes Wachstum mathematisch beschreiben können.

Beispiel 1-beschränktes Wachstum

Es werden 10 Fische in einem Teich ausgesetzt. Man nimmt an: der Unterschied zwischen der geschätzten Kapazität K des Teiches (810 Fische) und dem vorhandenen Bestand nimmt jährlich um 25% ab. Wie lautet das Wachstumsgesetz eines Fisches ?

Notieren wir in der Tabelle die Anzahl Fischer für die ersten paar Jahre:

Jahr	0	1	2	3	4	5	...
Anzahl Fische							

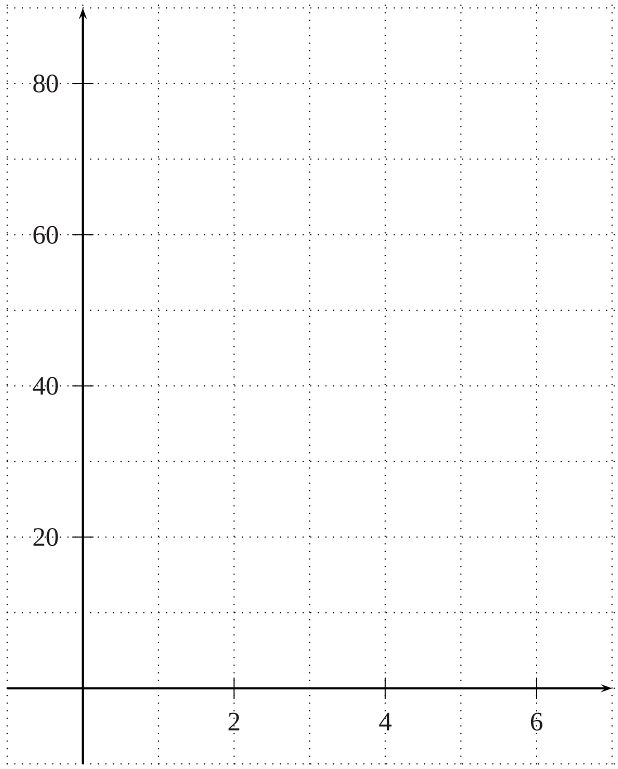


Min	$K - B$	
0 Min		
1 Min		
2 Min		
t Min		

Beispiel 2-beschränkter Zerfall In einem Raum mit der Umgebungstemperatur $U = 20°C$ befindet sich eine Tasse heissen Kaffees mit der anfänglichen Temperatur $T_0 = 80°C$. Der Kaffee kühlt nun ab gemäss der folgenden Tabelle:

Anz. Minuten	0	1	2	3	4	5	...
Temperatur	80	68	58.4	50.7	44.6	39.7	

Wie lautet das Zerfallsgesetz für die Temperatur des Kaffees ?



Min	$T-U$	
0 Min		
1 Min		
2 Min		
t Min		

Allgemein können wir beschränktes Wachstum/beschränkten Zerfall folgendermassen beschreiben:

Übungen

1. Die Spannung U [Volt] einer 12-Volt-Batterie während des Einschaltvorgangs im Zeitpunkt t [Sekunden] lässt sich mit beschränktem Wachstum beschreiben. Es ist dabei bekannt, dass $U(0) = 0$ und $U(0.1) = 2$.

a) Berechne das Wachstumsgesetz.

b) Welches ist die Spannung im Zeitpunkt $t = 0.2$ [Sekunden] ? [$\approx$ 3.67 Volt]

c) In welchem Zeitpunkt beträgt die Spannung 6 Volt ? [$\approx$ 0.38 Sekunden]

2. In einer Fischzucht wird das Wachstum einer Forellenart verfolgt. Im Mittel ergeben sich folgende Werte:

Lebenszeit [Monate]	2	4	6	8	10
Länge [cm]	6.6	11.2	14.7	17.0	18.8

a) Trage die Werte in ein Koordinatensystem ein. Was beobachtest Du ?

b) Ermittle mit Hilfe der Wertepaare $(4 \mid 11.2)$ und $(8 \mid 17.0)$ eine Funktion $G(t)$ mit $G(t) = K - (K - G(0))a^t)$, die das Wachstum der Fische beschreibt, wenn wir $G(0) = 0$ annehmen. [$G(t) = 23.23 - 23.23 \cdot 0.85^t)$]

c) Wie gross sind die Fische im Mittel nach einem Jahr ? [20 cm]

d) Welche durchschnittliche Länge hat eine ausgewachsene Forelle ? [23.23 cm]

3. In einem Raum mit der Umgebungstemperatur $U = 21.7°C$ befindet sich eine Tasse heissen Kaffees mit der anfänglichen Temperatur von $79.7°C$. Nach 2 Minuten beträgt die Temperatur noch 62.6°.

a) Wie warm ist der Kaffee nach 6 Minuten ? [$42.03°C$]

b) Wann beträgt die Kaffee-Temperatur $50°C$? [$t = 4.11$ min]

4. Die Oberflächentemperatur einer Leiche lässt sich mit beschränktem Zerfall beschreiben. Nun wird ein Leichnam mit einer Körpertemperatur von $28.5°C$ um Mitternacht bei einer konstanten Umgebungstemperatur von $17.4°C$ entdeckt. Nach Ablauf von 2 Stunden beträgt die Temperatur des Leichnams $23.2°C$. Um die Todesursache herauszufinden, muss der Todeszeitpunkt bestimmt werden. Wann ist die Person gestorben, wenn man von einer Körpertemperatur von $37°C$ ausgeht ? [um 22.15 Uhr]

5. In einer Stadt gibt es 40'000 Haushalte, von denen schätzungsweise jeder fünfte für den Kauf eines neu auf den Markt gebrachten Haushaltsartikels in Frage kommt. Es ist damit zu rechnen, dass der Absatz des Artikels im Laufe der Zeit schwieriger wird, da der Kreis möglicher Käufer und deren Kauflust abnimmt. Es soll angenommen werden, dass pro Monat jeweils ein bestimmter, gleich bleibender Bruchteil der bis dahin noch nicht erreichten Haushalte den Artikel kauft.

a) In den ersten drei Monaten werden 1700 Stück des Artikels verkauft. Kann der Hersteller davon ausgehen, dass innerhalb des ersten Jahres wenigstens 5500 Stück verkauft werden ? [Nein, es werden ca. 4900 Stück verkau

b) Wie lange wird es voraussichtlich dauern, bis 80% der in Frage kommenden Haushalte das neue Gerät kaufen ? [$t = 20.21$ m]

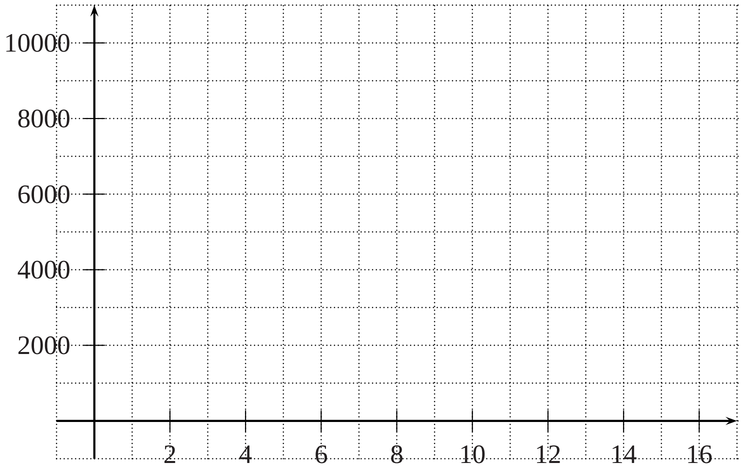
2 Logistisches Wachstum

In diesem Abschnitt betrachten wir Wachstumsvorgänge, die Anfangs exponentiell wachsen, danach aber verlangsamen und schliesslich zum Erliegen kommen. Solche Vorgänge kommen natürlich vor (z.B. Verbreitung einer Krankheit, Wachstum eines Baumes, Verbreitung eines Gerüchts)

Beispiel

In einer abgelegenen Region mit 10000 Einwohnern sei jemand an einer leichten, aber ansteckenden Grippe erkrankt. Gemäss der folgenden Tabelle verbreitet sich die Krankheit folgendermassen:

Woche	Anz. Kranke
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	254
9	502
10	979
11	1862
12	3377
13	5614
14	8076
15	9630
16	9986



Wir beobachten:

Wir wollen nun eine Gesetzmässigkeit herausfinden:

Woche	Anz. kranke M.	Anz. gesunde M.	Neuerk.
1			
2			
3			
14			
t			

Definition 1 *Ein Wachstum heisst Logistisches Wachstum mit der Kapazität K, wenn gilt:*

Häufiger wird mit der untenstehenden Formel gerechnet, für deren Herleitung unsere mathematischen Mittel allerdings nicht ausreichen:

Satz 1 *Logistisches Wachstum lässt sich mit folgendem Gesetz beschreiben:*

Wir kehren noch einmal zu unserem Einführungsbeispiel zurück und wenden unsere Formel an:

Übungen

6. Vier Schüler einer Schule mit 400 Schülern setzen ein Gerücht in Umlauf, dass sich logistisch verbreitet. Das Gerücht breitet sich anfänglich exponentiell mit einem prozentualen Zuwachs von 20% pro Minute aus. Nach welcher Zeit kennen 380 Schüler das Gerücht ? [$t = 40.99$ min]

7. Von 6000 isoliert lebenden Menschen (z. B. eines Indianerstamms) infiziert sich eine Person an Grippe. Durch gegenseitige Ansteckung zählt man nach 5 Wochen bereits 400 Kranke.

   a) Um die Ausbreitung dieser Grippe zu modellieren, geht man von einem logistischem Wachstum der Anzahl Erkrankten aus. Was spricht für diese Annahme?

   b) Bestimme den Funktionsterm. Nach welcher Zeit ist die Hälfte der Bewohner krank ? Welche Bedeutung hat dieser Zeitpunkt für die weitere Ausbreitung der Krankheit ?

   [$f(t) = \dfrac{6000}{1+5999\cdot 0.2976^t}, t = 7.17$ Wochen]

   c) Wie gross ist in den ersten 2 Monaten die mittlere Zunahme an Erkrankten ? [$m = 547.87$]

8. Eine Fichte ist 10 Jahre nach der Pflanzung etwa 8 m hoch, nach weiteren 10 Jahren etwa 13 m. Fichten werden im Durchschnitt etwa 35 m hoch.

   a) Welche durchschnittliche Höhe ergibt sich daraus für einen 50 Jahre alten Fichtenwald, wenn man logistisches Wachstum annimmt ? [32 cm]

   b) Veranschauliche das Wachstum bis zum Alter von 100 Jahren mit Hilfe eines Graphen.

9. Die Handyverbreitung in Finnland hat in den Jahren 1990-1999 den folgenden Verlauf (obere Zeile: Jahr, untere Zeile: Anzahl Handys) genommen:

1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
257872	319137	386021	489174	675565	1039126	1502003	2162574	2946948	3363589

Die maximale Anzahl Käufer ist 4700000. Wie lautet das Wachstumsgesetz, wenn wir von logistischem Wachstum ausgehen ?

[mit B(8): $B(t) = \frac{4700000 \cdot 257872}{257872 + 4442128 \cdot 0.6566^t}$]