2.8 Trigonometrische Funktionen

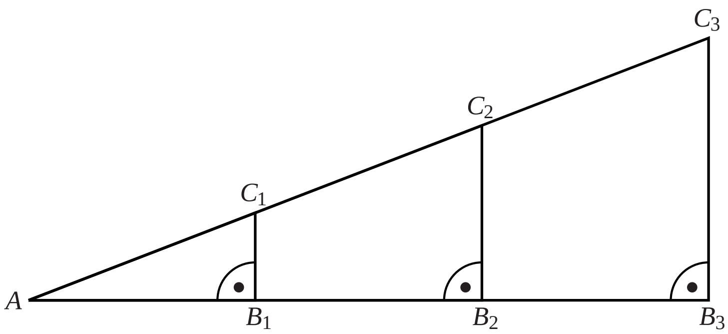
(Thema aus dem Bereich Analysis/Geometrie)

Inhaltsverzeichnis

1 Repetition und Einleitung

Die Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktion haben wir bereits bei den rechtwinkligen Dreiecken eingeführt (Thema Trigonometrie, „Dreieckslehre “), allerdings nur für Winkel zwischen 0° und 90°. Es geht in diesem Skript (unter anderem) darum, diese Funktionen zu erweitern auf beliebige Winkel.

Wir haben im 1.Jahr Folgendes gelernt:



Die Werte der Streckenverhältnisse

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{AC_4}} = \ldots$$

oder

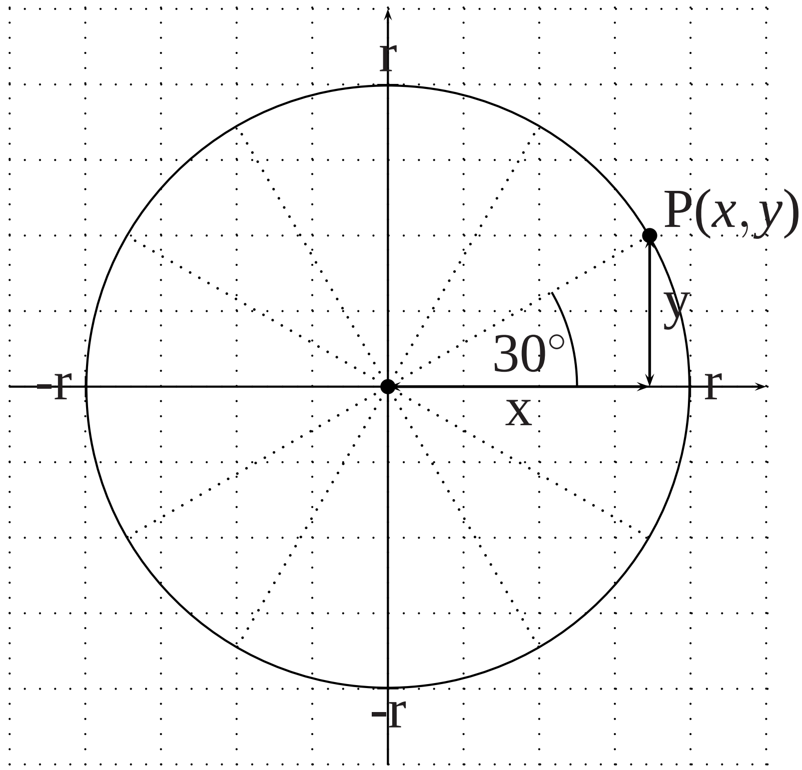
$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{AB_3}}{\overline{B_3C_3}} = \frac{\overline{AB_4}}{\overline{B_4C_4}} = \ldots$$

sind von der Lage des Lotes $\overline{BC}$ unabhängig. Sie sind einzig und allein durch die Grösse des Winkels α bestimmt und ändern sich mit diesem.

Wir können einem Winkel **sein** Verhältnis zuordnen und umgekehrt einem Verhältnis den **dazugehörigen Winkel**. Beachte, dass diese Zuordnung **eindeutig** ist. In der Mathematik benutzt man für Zuordnungen den Begriff **Funktion**. Weil diese Zuordnung bei Dreiecken geschieht, sprechen wir von **trigonometrischen Funktionen**.

- $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{c}$
- $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c}$
- $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$

2 Verhältnisse beim Kreis mit Radius r



Wir erweitern unsere Funktionen nun auf beliebige Winkel.

Definition 1 *Gegeben sei ein Kreis mit Radius r. Dann definieren wir:*

- $\sin(\alpha) = \frac{y}{r}$
- $\cos(\alpha) = \frac{x}{r}$
- $\tan(\alpha) = \frac{y}{x}$

Bemerkungen:

- x und y können auch negative Werte annehmen (wenn z.B. der Punkt P im 3.Quadranten liegt).
- Wenn α z.B. 450° ist, dann machen wir eine Kreisumdrehung und noch 90°.

Übung

1. Fülle die untenstehende Tabelle aus.

x	-90°	0	90°	180°	270°	360°
$\sin(x)$						
$\cos(x)$						
$\tan(x)$						

2. Löse die einzelnen Teilaufgaben.
   a) Welcher Winkel im Bereich 90° bis 180° kommt in die Lücken ?
      i) $\sin(30°) = \sin(....)$ ii) $\sin(40°) = \sin(....)$
   b) Welcher Winkel im Bereich 270° bis 360° kommt in die Lücken ?
      i) $\sin(220°) = \sin(....)$ ii) $\sin(240°) = \sin(....)$
   c) Welcher Winkel im Bereich 360° bis 450° kommt in die Lücken ?
      i) $\sin(45°) = \sin(....)$ ii) $\sin(30°) = \sin(....)$
   d) Welcher Winkel im Bereich 720° bis 810° kommt in die Lücken ?
      i) $\sin(45°) = \sin(....)$ ii) $\sin(30°) = \sin(....)$
   e) Welcher Winkel im Bereich 90° bis 360° kommt in die Lücken ?
      i) $\cos(30°) = \cos(....)$ ii) $\cos(40°) = \cos(....)$
      iii) $\cos(120°) = \cos(....)$ iv) $\cos(200°) = \cos(....)$
   f) Welcher Winkel im Bereich 360° bis 450° kommt in die Lücken ?
      i) $\cos(45°) = \cos(....)$ ii) $\cos(30°) = \cos(....)$
   g) Welcher Winkel im Bereich 720° bis 810° kommt in die Lücken ?
      i) $\cos(45°) = \cos(....)$ ii) $\cos(30°) = \cos(....)$
   h) Welcher Winkel im Bereich 90° bis 360° kommt in die Lücken ?
      i) $\tan(30°) = \tan(....)$ ii) $\tan(40°) = \tan(....)$
      iii) $\tan(120°) = \tan(....)$ iv) $\tan(150°) = \tan(....)$

3. Überprüfe die folgenden Aussagen für die Winkel 30°,110° und 220°:
   a) $\sin(x) = \sin(-x)$ b) $\cos(x) = \cos(-x)$
   c) $\cos(x) = -\cos(-x)$ d) $\sin(x) = -\sin(-x)$
   e) $\tan(x) = -\tan(-x)$

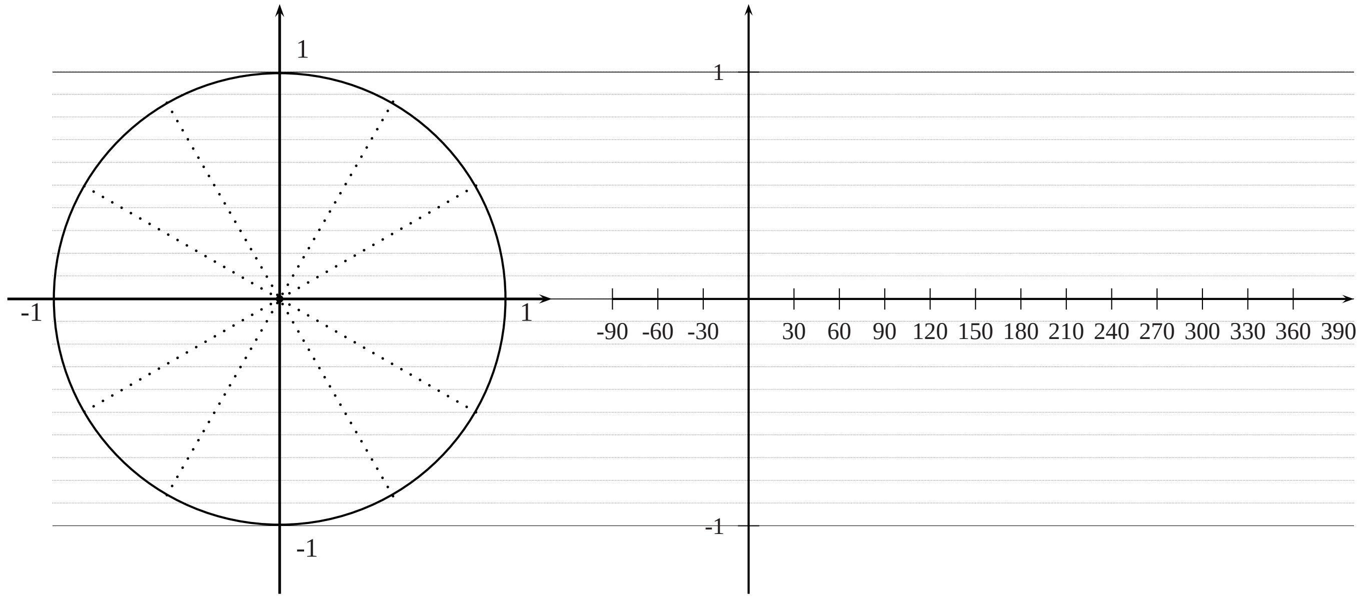
4. Für welche Winkel zwischen 0° und 360° sind die folgenden Gleichungen erfüllt ?
   a) $\sin(x) = 1$ b) $\sin(x) = 0$
   c) $\cos(x) = 0$ d) $\cos(x) = 1$
   e) $\tan(x) = 1$

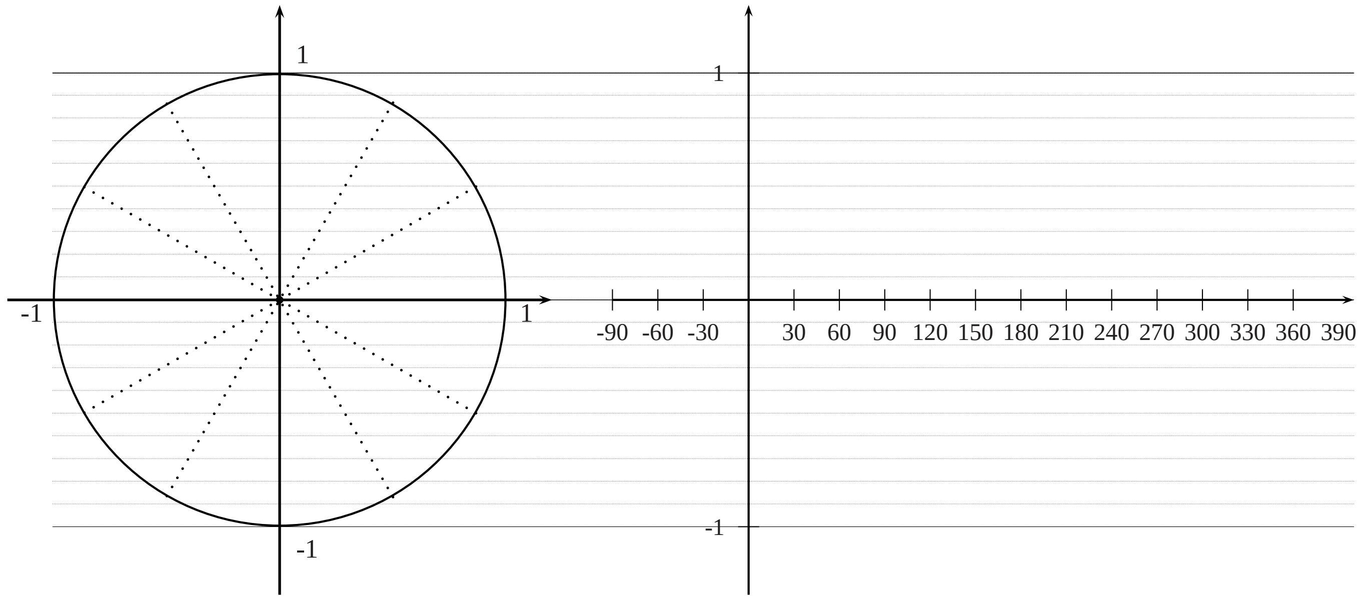
5. Gib die Wertemengen der sin-,cos- und tan-Funktion an.

Fassen wir unsere Ergebnisse zusammen:

3 Die Graphen der Sinus- und der Cosinusfunktion

Wie zeichnen wir den Graphen einer Funktion ? Wir setzen ein paar x-Werte in die Vorschrift ein, berechnen die y-Werte und zeichnen die Punkte ins Koordinatensystem ein. Dieses Vorgehen funktioniert hier leider nicht, weil die Funktionvorschrift nicht in der Form $f(x) = 3x^2 + x$ ist. Wir bräuchten den x und y-Wert des Punktes, dieses sind aber nur in speziellen Fällen bekannt. Um den Graphen zu zeichnen, müssen wir hier ein anderes Vorgehen wählen.


1
-1
1
-1
1
-1
-90 -60 -30 30 60 90 120 150 180 210 240 270 300 330 360 390


1
-1
1
-1
1
-1
-90 -60 -30 30 60 90 120 150 180 210 240 270 300 330 360 390

Übungen

6. Gegeben ist die Vorschrift der Sinusfunktion in ihrer allgemeinsten Form: $f(x) = a \cdot \sin(bx + c) + d$. Wir wollen uns bei den folgenden Teilaufgaben den Einfluss der Parameter auf den Graphen mit Hilfe des TI-89 überlegen.

   a) Vergleiche die Graphen der folgenden Vorschriften:

      i) $\sin(x)$ ii) $3\sin(x)$
      iii) $0.5\sin(x)$ iv) $-2\sin(x)$

   b) Vergleiche die Graphen der folgenden Vorschriften:

      i) $\sin(x)$ ii) $\sin(3x)$
      iii) $\sin(0.5x)$ iv) $\sin(-2x)$

   c) Vergleiche die Graphen der folgenden Vorschriften:

      i) $\sin(x)$ ii) $\sin(x + 90)$
      iii) $\sin(x - 150)$

   d) Vergleiche die Graphen der folgenden Vorschriften:

      i) $\sin(x)$ ii) $\sin(x) + 1$
      iii) $\sin(x) + 1.5$ iv) $\sin(x) - 2$

7. Skizziere die folgenden Graphen, immer ausgehend von der Grundfunktion $\sin x$ bzw. $\cos x$. Einheit ist das Winkelmass.

   a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \sin(3x) + 1$ b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 2\cos(x + 90^\circ)$

4 Berechnung von speziellen trigonometrischen Funktionswerten

In diesem Kapitel geht es darum, spezielle Funktionswerte der Sinus-, Cosinus- und Tangensfunktion zu berechnen.

4.1 Der 45°-Winkel

Aufgabe: Berechne sin(45°) ohne Taschenrechner !

4.2 Der $30°$-Winkel

Aufgabe: Berechne $\sin(30°)$ ohne Taschenrechner !

4.3 Der $60°$-Winkel

Aufgabe: Berechne $\sin(60°)$ ohne Taschenrechner !

8. Berechne ohne Taschenrechner:

   a) $\cos(45^\circ) =$ b) $\cos(30^\circ) =$ c) $\cos(60^\circ) =$

   d) $\tan(45^\circ) =$ e) $\tan(30^\circ) =$ f) $\tan(60^\circ) =$

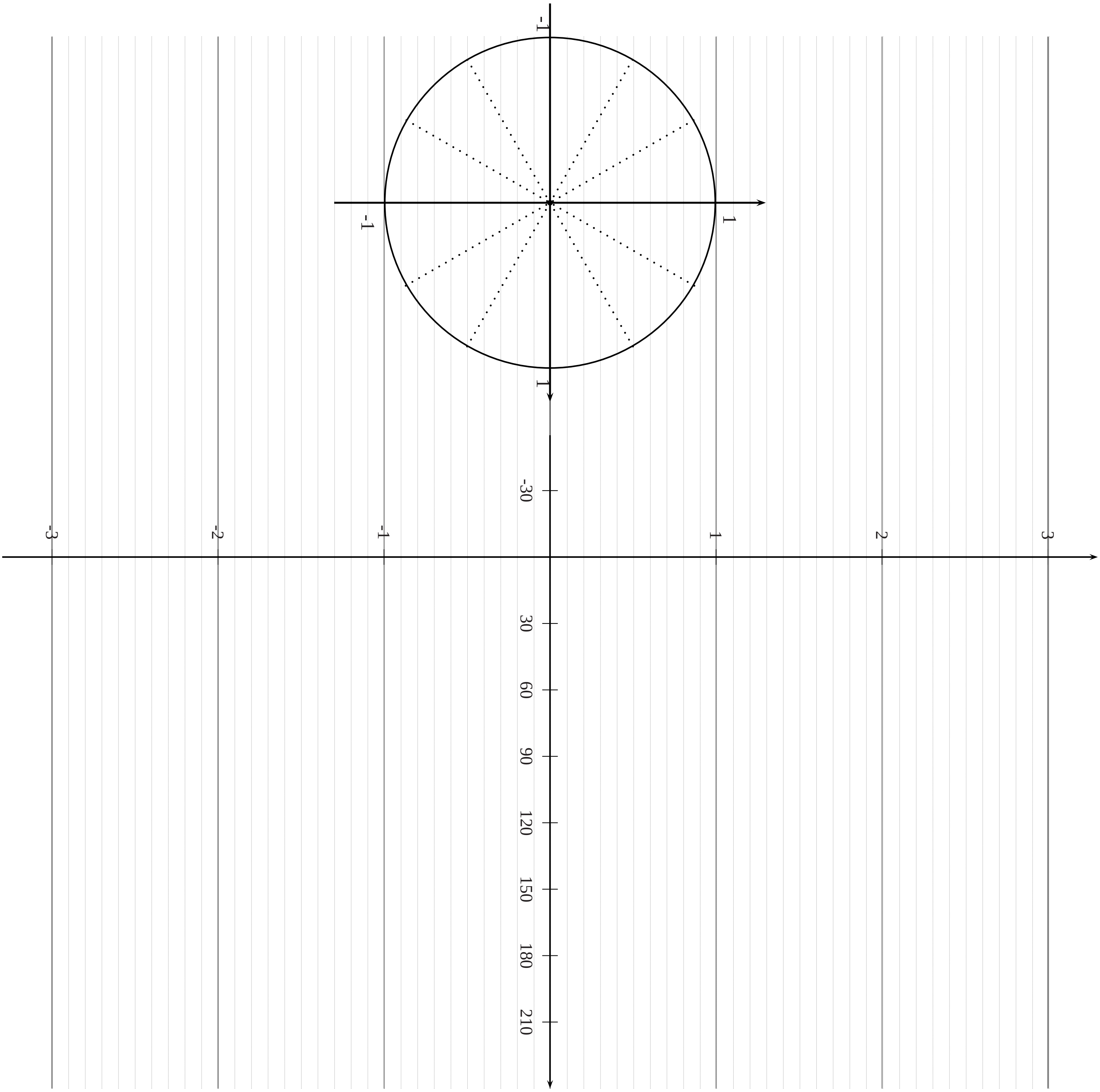
9. Für welche x sind die folgenden Gleichungen erfüllt ?

   a) $\sin(x) = \frac{1}{2}$ b) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Wir können nun noch eine weitere Tabelle mit Funktionswerten der trigonometrischen Funktionen aufstellen.

x	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(x)$					
$\cos(x)$					
$\tan(x)$					

5 Der Graph der Tangensfunktion.



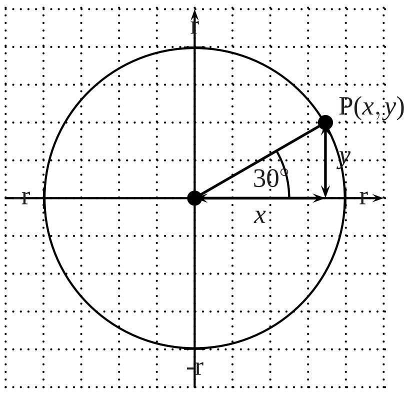
Übung

10. Zeichne den Graphen der folgenden Funktionen:

   a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = 0.5 \cdot \tan(x)$ b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = \tan(x + 45°)$

6 Das Bogenmass

Betrachten wir noch einmal die Abbildung aus dem zweiten Abschnitt. Die Position des Punktes P auf dem Bogen kann mit dem Winkel α beschrieben werden. Es gibt noch eine andere Möglichkeit, die sich in gewissen Aufgabenstellungen als einfacher erweist. Die Idee: Wir geben an, wie weit wir auf dem Kreis gewandert sind, bis wir beim Punkt angelangt sind. In unserem Fall ($\alpha = 30°$):



11. Fülle die folgende Tabelle aus.

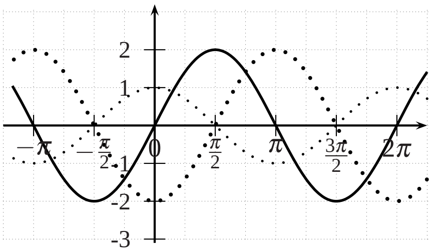
x	$-\pi$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin(x)$						
$\cos(x)$						
$\tan(x)$						

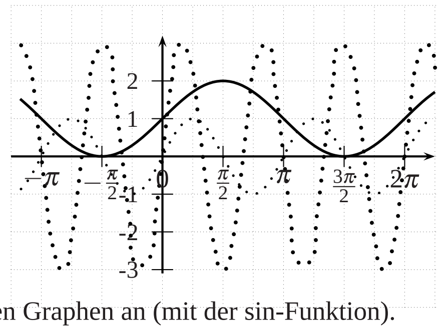
12. Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen. Die Einheit ist das Bogenmass.

a) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sin(x)$
b) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\cos(x)$
c) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\tan(x)$
d) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\sin(2x)$
e) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\cos(x)+1$
f) $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=\tan(x-\pi)$

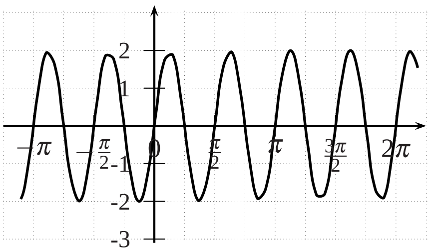
13. Welche Vorschriften gehören zu den untenstehenden Graphen ?

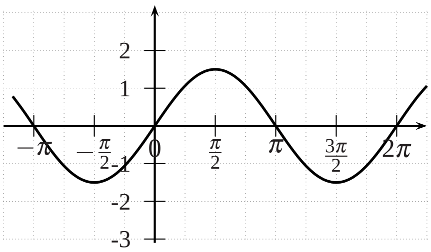
a) $f(x)=2\cdot\sin(x)$
b) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
c) $f(x)=2\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
d) $f(x)=\sin(x)+1$
e) $f(x)=\sin(2x)$
f) $f(x)=3\cdot\sin(3x)$

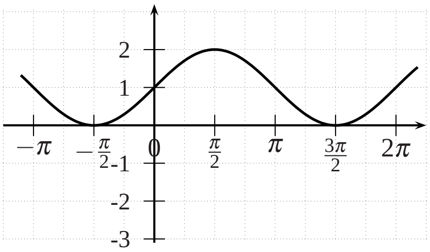


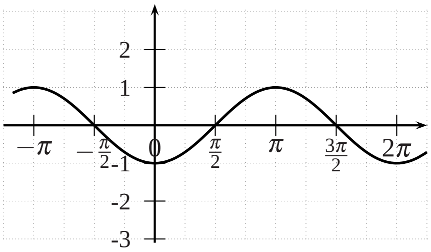


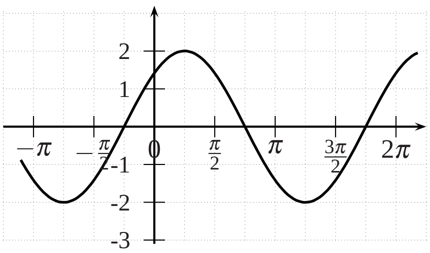
14. Gib die Vorschriften zu den untenstehenden Graphen an (mit der sin-Funktion).

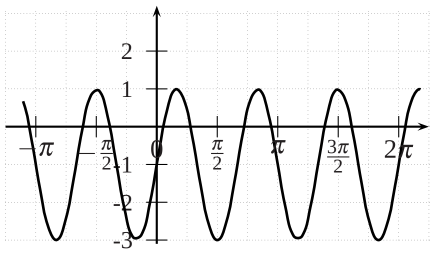












15. Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen im Bereich $-\pi \leq x \leq 3\pi$:

a) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ b) $f(x) = \sin(x/3) + \cos(x/4)$

16. Gegeben sei die Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{3}{2}x + 2\pi\right)$

    a) Für welche x-Werte gilt: $f(x) = 0$?
    b) Für welche x-Werte ist $f(x)$ maximal ?
    c) Für welche x-Werte ist $f(x)$ minimal ?

17. Gegeben sei die Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = \frac{2}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x + 2\pi\right)$

    a) Für welche x-Werte gilt: $f(x) = 0$?
    b) Für welche x-Werte ist $f(x)$ maximal ?
    c) Für welche x-Werte ist $f(x)$ minimal ?

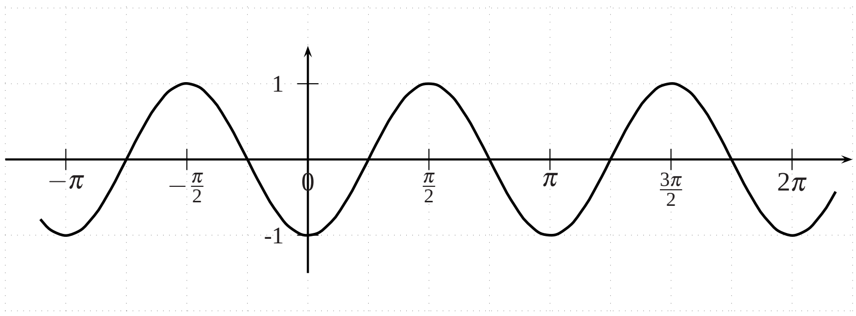
7 Noch einmal die allgemeine Sinusfunktion

Frage: Können wir aufgrund der Funktionsvorschrift den Graphen voraussagen ?

Antwort: Aufgrund der bisherigen Aufgaben müssen wir die Frage mit ja beantworten. Allerdings wurden die „heiklen Fälle “bisher vermieden. Betrachten wir folgende Sinusfunktion:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\, f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Der Graph sieht folgendermassen aus:



Beobachtung:

- Vor dem x steht eine 2, im Intervall von 2π sind tatsächlich zwei vollständige Schwingungen enthalten. Auf diese Zahl können wir uns offenbar verlassen.
- Von $2x$ wird der Wert $\pi/2$ subtrahiert, der Graph wurde allerdings nur um $\pi/4$ Einheiten nach rechts verschoben. Der Wert $\pi/2$ lässt sich also nicht direkt auf den Graphen übertragen.

Den Grund für diesen „Fehler “haben wir schon bei den Funktionen kennengelernt. Noch einmal:

Bei welcher Änderung der Vorschrift wird der Graph um 5 Einheiten nach rechts verschoben ?

- $3x \to 3x-5$
- $3x \to 3(x-5)$

Die Regel lautet: Ein Graph wird um 5 Einheiten nach rechts verschoben, indem man überall x durch $x-5$ ersetzt.

Zurück zu unserer Funktion:

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\, f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$$

Wir brauchen bloss die 2 auszuklammern, damit vor dem x kein Faktor mehr steht:

$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\, f(x)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Jetzt können wir aus der Vorschrift direkt herauslesen:

Die Funktion $\sin(x)$ wurde um $\pi/4$-Einheiten nach rechts verschoben, dazu wurde die Bogenlänge wegen dem Faktor 2 halbiert.

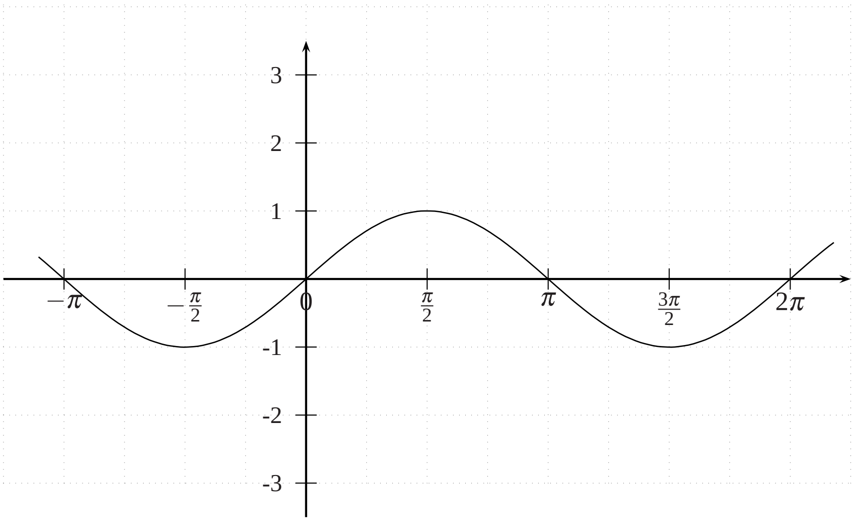
Bei der Funktion $f(x)=a\sin(bx+c)+d=a\sin b(x+\frac{c}{b})+d$ haben die Parameter a,b,c und d also folgende Bedeutung:

- a : Höhe des Bogens (Amplitude).
- b : Breite des Bogens, wird berechnet mit $360^\circ/b$ oder $2\pi/b$.
- c/b: Verschiebung des Graphen um c/b Einheiten nach links oder nach rechts.
- d: Verschiebung des Graphen um d Einheiten nach oben oder nach unten.

Übung

18. Es liege die Funktion $f(x)=a\cos(bx+c)$ vor ($d=0$). Berechne die Parameter a,b und c, wenn bekannt ist:
    - Nullstellen: $x=-\frac{3\pi}{4},\frac{9\pi}{4},\frac{21\pi}{4},\ldots$
    - Höchste Punkte: $x=-\frac{9\pi}{4},\frac{15\pi}{4},\frac{39\pi}{4},\ldots$ (y ist jeweils 5)
19. Skizziere direkt mit Hilfe der Funktionsvorschrift in Koordinatensystem:

    a) $\sin\left(3x+\frac{3\pi}{2}\right)$ b) $2\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ c) $\cos(4x+2\pi)$



8 goniometrische Gleichungen

Goniometrische Gleichungen sind Gleichungen, die mindestens eine trigonometrische Funktion enthalten.

8.1 einfache goniometrische Gleichungen

Beispiel:

Finde alle Lösungen der nachfolgenden Gleichungen im Bogenmass:

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

Übung

20. Finde alle Lösungen der nachfolgenden Gleichungen im Bogenmass:

a) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2\cos(x) = \frac{1}{2}$

c) $\tan(2x) = 1$

d) $\sin(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

8.2 goniometrische Gleichungen, die mit der Beziehung $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ gelöst werden.

Beispiel:

$\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x) = 0$

21. Finde alle Lösungen der nachfolgenden Gleichung im Gradmass:

    a) $\sin(x) = \cos(x)$

    b) $\cos(x) = \sqrt{3}\sin(x)$

    c) $\sin(x) + \tan(x) = 0$

9 Das Fadenpendel

Wir wollen noch eine Anwendung der trig. Funktionen in der Physik betrachten. Ein Pendel schwingt hin und her. Dabei ist die Fadenlänge „gross“ im Vergleich zur Auslenkung. Wenn das der Fall ist, können wir diese Pendelbewegung mit der Funktion $f(t) = a \cdot \cos(bt + c)$ beschreiben. Zwei Übungen dazu:

Übungen

22. Das Schwingen eines Fadenpendels kann mit der Funktion $y : [0, \infty] \to [-2, 2], y(t) = 2\sin(\pi \cdot t)$ mit $[t] =$ s und $[y(t)] =$ dm beschrieben werden.

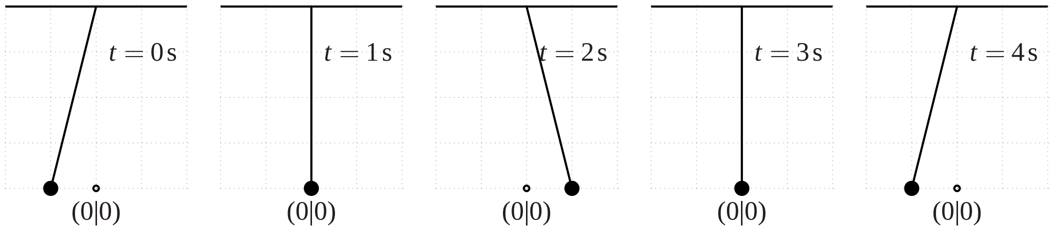
    a) Zeichne den Graphen dieser Funktion.

    b) Wie weit schlägt das Pendel maximal aus ?

c) Zu welchen Zeitpunkten erreicht das Fadenpendel seinen tiefsten Punkt ?

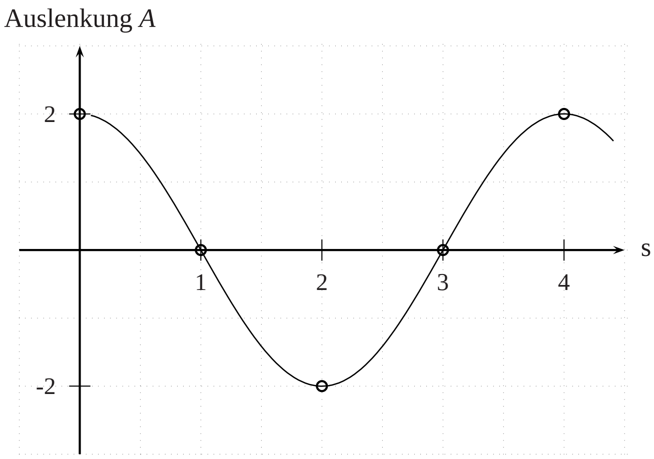
d) Wie lange dauert es, bis das Fadenpendel einmal hin und her schwingt ?

23. Beim untenstehenden Graphen ist die Bewegung eines Fadenpendels aufgezeichnet. Wie lautet die Funktionsgleichung ?



1 Häuschen sei 2 cm breit. Dann können wir folgende Tabelle aufstellen:

t in s	0	1	2	3	4
Abstand zu (0|0) in cm	2	0	-2	0	2



10 Checkliste

Nachfolgende Checkliste soll einen Überblick über das Thema bieten:

- Ich kenne die wichtigsten Eigenschaften der $\sin -, \cos -$ und Tangensfunktion.

  $\rightarrow$

  - Die $\sin -$ und cos-Funktionen sind 2π-Periodisch, die Tangensfunktion ist π-periodisch.

  - Für die Sinusfunktion gilt: $\sin(\alpha) = \sin(180^\circ - \alpha)(0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$ (Symmetrie im Bereich 0° bis 180°). Diese Symmetrie könnte noch viel umfassender formuliert werden, für unsere Berechnungen reicht es aber so.
  - Für die Cosinusfunktion gilt: $\cos(\alpha) = \cos(360^\circ - \alpha)(0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ)$ (Symmetrie im Bereich 0° bis 360°). Auch diese Symmetrie könnte noch viel umfassender formuliert werden.

- Ich kann einen Winkel vom Gradmass ins Bogenmass umrechnen und umgekehrt.

  $\rightarrow$ 2π ist der gleiche Winkel wie 360°, mit Hilfe dieser Beziehung können wir alles berechnen.

- Ich kann die Graphen der einfachen Sinus-, Cosinus und Tangensfunktion mit Hilfe der wichtigsten Punkte skizzieren.

  $\rightarrow$

  - $\sin, \cos$: Jeweils die Nullstellen, die höchsten und tiefsten Punkte einzeichnen, dann den Graphen skizzieren.
  - tan: Pole einzeichnen, Nullstellen, Punkte mit dem y-Wert 1 (Winkel, wo der Tangens 1 ergibt)

- Ich kann die Funktionswerte der 30°-,45°- und 60°-Winkel berechnen (der $\sin -, \cos -$ und $\tan -$Funktion).

  $\rightarrow$ s. Übungen

- Ich kenne die Bedeutung der Parameter a, b, c und d der allgemeinen Sinus- und Cosinusfunktion ($f(x) = a\sin(bx + c) + d$ bzw. $f(x) = a\cos(bx + c) + d)$).

  $\rightarrow$

  - a: Amplitude
  - b: $360^\circ/b$ ergibt die Breite eines Bogens (Beispiele: Wenn $b = 2$, dann ist der Bogen 360°/2 = 180° breit, wenn $b = 1/2$, dann ist der Bogen 360°/(1/2) = 720° breit).
  - c: kann in der Regel nicht sofort eine Bedeutung zugewiesen werden, erst muss b faktorisiert werden. Folgendermassen: $f(x) = a\sin(bx + c) + d = a\sin b(x + \frac{c}{b}) + d$. Der Graph wird (im Vergleich zur Funktion $f(x) = \sin(x)$) um $\frac{c}{b}$ Einheiten nach links oder rechts verschoben.
  - d: Verschiebung um d Einheiten nach oben oder unten.

- Ich kann den Graphen einer beliebigen $\sin -, \cos -$ oder tan-Funktion direkt mit der Vorschrift skizzieren.

  $\rightarrow$

  - Wenn nötig (d.h. wenn x nicht alleine steht, z.B. $2x, 3x, \frac{1}{3}x$,..), mit der Zahl vor dem x faktorisieren, dann gemäss obiger Liste den Graphen zeichnen.

- Ich kenne die zwei behandelten Verfahren, um goniometrische Gleichungen zu lösen.

  $\rightarrow$

  - Einfacher Fall: Direkt mit der Umkehrfunktion, daraus die weiteren Lösungen bestimmen.
  - Zweiter Fall: Die Gleichung so dividieren, dass nur noch eine trigonometrische Funktion vorkommt, dann geht die Gleichung in den einfachen Fall über.