2.5 Funktionen 2.Grades

(Thema aus dem Bereich Analysis)

Inhaltsverzeichnis

1 Definition einer Funktion 2.Grades.

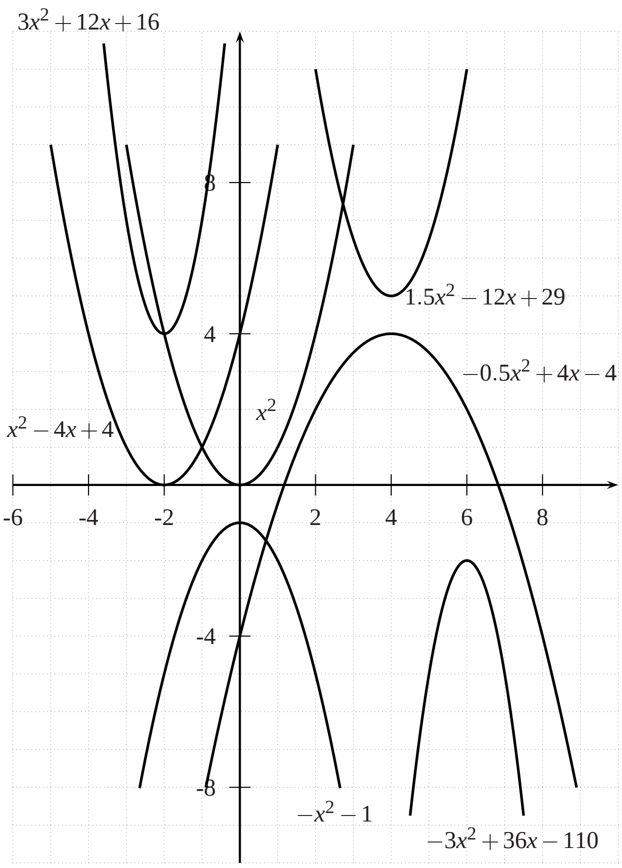
Bei einer Funktion 2.Grades soll sicher ein x^2 vorkommem. Ein x muss nicht zwangsläufig vorkommen. Sowohl die Zahlen vor dem x^2 und x als auch die blosse Zahl können beliebige Werte annehmen, die Zahl vor dem x^2 soll einfach nicht 0 sein, weil sonst der Quadratterm wegfällt. Wir legen also fest:

Definition 1 *Eine Funktion heisst Funktion 2.Grades, wenn ihre Vorschrift durch Termumformungen auf folgende Form gebracht werden kann:*

Bemerkungen:

- Die Form (Klammern gelöst und alle Terme soweit wie möglich zusammengefasst), in der sich die obige Vorschrift befindet, heisst **Normalform**.
- Eine Funktion 2.Grades wird oft auch **quadratische Funktion** genannt.
- a, b und c nennen wir **Parameter**.

Die Funktionsgraphen sehen folgendermassen aus:


$3x^2+12x+16$
$1.5x^2-12x+29$
$-0.5x^2+4x-4$
x^2
x^2-4x+4
$-x^2-1$
$-3x^2+36x-110$
8
4
-4
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8

Übungen

1. Entscheide, ob eine Funktion 2.Grades vorliegt. Falls ja, dann bestimme die Parameter a, b und c.

   a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -0.5x^2 + 4x - 4$ b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^3 + 4x - 4$

   c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = (x-1)^2 + 4x - 4 - x^2$ d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -x^2 - 1$

2. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen und bestimme danach durch Ablesen den Scheitelpunkt und sämtliche Nullstellen.

   a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 - 4$ $[S(0|-4), N_1 = (-2|0), N_2 = (2|0)]$

   b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 + 2x - 3$ $[S(-1|-4), N_1 = (-3|0), N_2 = (1|0)]$

   c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = -x^2 + 3x - 2$ $[S(1.5|0.25), N_1 = (1|0), N_2 = (2|0)]$

3. **Berechne** bei den folgenden Funktionen 2.Grades die Nullstellen und vergleiche wenn möglich mit der vorherigen Aufgabe.

   a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 - 4$ $[N_1(-2|0), N_2(2|0)]$

   b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 - 2x - 63$ $[N_1(-7|0), N_2(9|0)]$

   c) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2 + 3x - 3$ $[N_1(-3.79|0), N_2(0.79|0)]$

   d) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = -x^2 + 3x - 2$ $[N_1(1|0), N_2(2|0)]$

4. Kannst Du mit den Ergebnissen der obigen Aufgaben jeweils den Scheitelpunkt berechnen ?
   $[S_a(0|-4), S_b(1|-64), S_c(-1.5|-5.25), S_b(1.5|0.25),]$

5. Ein Kugelstösser stösst eine Kugel. Die Flugbahn der Kugel lässt sich mit dem folgenden Gesetz beschreiben:

   $$H(x) = -\frac{1}{35}x^2 + 0.5x + 1.5,\ x\text{:Stelle am Boden, } H(x)\text{: Höhe der Kugel.}$$

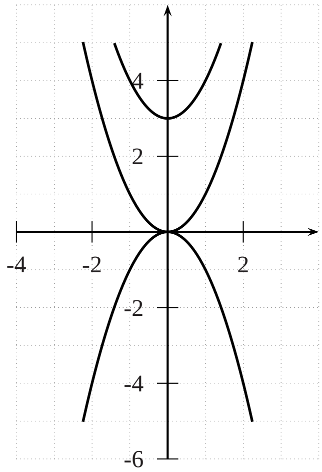
   a) An welcher Stelle erreichte die Kugel die maximale Höhe und welche Höhe erreichte die Kugel an dieser Stelle ? $[8.75\,\mathrm{m}, 3.69\,\mathrm{m}]$

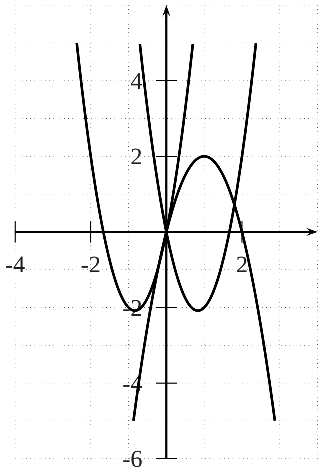
   b) Wie weit wurde die Kugel gestossen ? $[20.11\,\mathrm{m}]$

6. Ordne die Funktionsgraphen den entsprechenden Funktionen 2.Grades zu und begründe Deine Zuordnung ! Zur Auswahl stehen die folgenden Funktionsvorschriften:

   a) $f(x) = x^2 + 3$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = -x^2$

   d) $f(x) = 3x^2 - 5x$ e) $f(x) = 3x^2 + 5x$ f) $f(x) = -2x^2 + 4x$





7. Gegeben sind die untenstehenden Wertetabellen von Funktionen 2.Grades. Berechne jeweils die Differenz zwischen zwei benachbarten Zellen. Berechne anschliessend bei den erhaltenen Werten wiederum die Differenz zwischen zwei benachbarten Werten. Was beobachtest Du ?

a)

x	1	2	3	4	5	6
$y = x^2$	1	4	9	16	25	36

b)

x	1	2	3	4	5	6
$y = x^2 + 2x$	3	8	15	24	35	48

c)

x	1	2	3	4	5	6
$y = 2x^2 + x$	3	10	21	36	55	78

d)

x	1	2	3	4	5	6
$y = 3x^2$	3	12	27	48	75	108

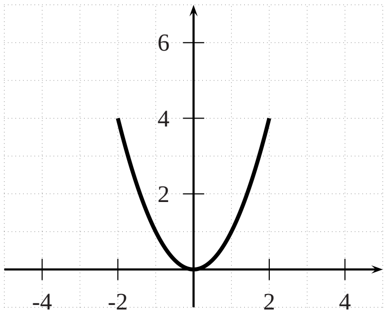
8. Gegeben ist eine Funktion 2.Grades mit der Vorschrift $f(x) = x^2 - x + 41$. Fülle die untenstehende Tabelle aus. Was beobachtest Du ?

x	1	2	3	4	5	6	...	40	41
$y = x^2 - x + 41$									

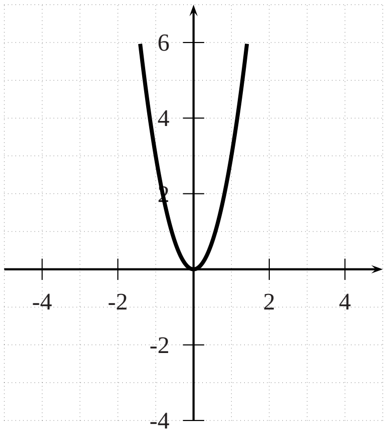
2 Die Verschiebung des Graphen

2.1 Die Verschiebung des Graphen in y-Richtung

9. a) Im untenstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Funktion $f_1(x) = x^2$ gezeichnet. Zeichne ins gleiche Koordinatensystem den Graphen der Funktion $f_2(x) = x^2 + 2$. Was beobachtest Du ?



b) Im untenstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Funktion $g_1(x) = 3x^2$ gezeichnet. Zeichne ins gleiche Koordinatensystem den Graphen der Funktion $g_2(x) = 3x^2 - 3$. Was beobachtest Du ?



c) Vervollständige den folgenden Satz: Der Funktionsgraph wird um 3 Einheiten nach oben verschoben, indem wir

....

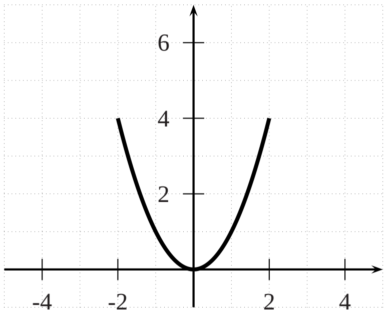
d) Vervollständige den folgenden Satz: Der Funktionsgraph wird um 2 Einheiten nach unten verschoben, indem wir

....

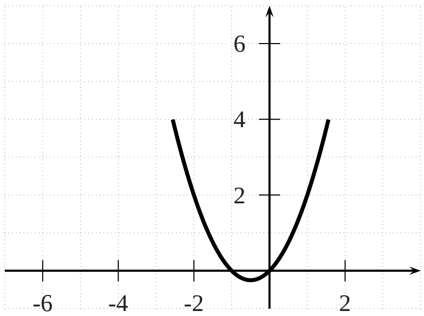
2.2 Die Verschiebung des Graphen in x-Richtung

Wir haben gesehen, wie wir einen Graphen nach oben oder nach unten verschieben können, jetzt geht es um die Frage: Wie können wir einen Graphen nach links oder nach rechts verschieben ?

10. a) Im untenstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Funktion $f_1(x) = x^2$ gezeichnet. Zeichne ins gleiche Koordinatensystem den Graphen der Funktion $f_2(x) = (x-2)^2$. Was beobachtest Du ?



b) Im untenstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Funktion $g_1(x) = x^2 + x$ gezeichnet. Zeichne ins gleiche Koordinatensystem den Graphen der Funktion $g_2(x) = (x+3)^2 + (x+3)$. Was beobachtest Du ?



c) Vervollständige den folgenden Satz: Der Funktionsgraph wird um 3 Einheiten nach links verschoben, indem wir

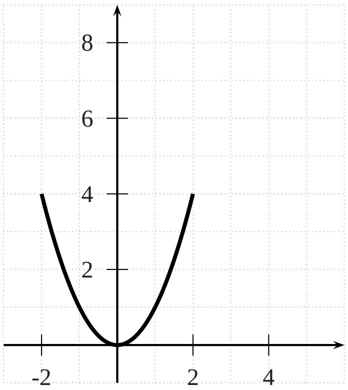
....

d) Vervollständige den folgenden Satz: Der Funktionsgraph wird um 2 Einheiten nach rechts verschoben, indem wir

....

2.3 Die Verschiebung eines Graphen in x- und y-Richtung

11. a) Im untenstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Funktion $f_1(x) = x^2$ gezeichnet. Zeichne die Graphen der Funktionen $f_2(x) = (x-2)^2$ und $f_3(x) = (x-2)^2 + 5$ ins gleiche Koordinatensystem .



b) Kannst Du einen Zusammenhang zwischen der Funktionsvorschrift und dem Scheitelpunkt herstellen ?

c) Welchen Scheitelpunkt hat die Funktion f_4 mit der Vorschrift $f_4(x) = (x+3)^2 - 4$

Wenn die Vorschrift in dieser Form ist, sprechen wir von der **Scheitelpunktsform**.

Übungen

12. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^2$. Ändere die Vorschrift so ab, dass der Graph um

a) 3 Einheiten nach oben verschoben wird.

b) 3 Einheiten nach links verschoben wird.

c) 3 Einheiten nach rechts verschoben wird.

d) 3 Einheiten nach unten verschoben wird.

e) 2 Einheiten nach rechts und 4 Einheiten nach oben verschoben wird.

f) 3 Einheiten nach links und 2 Einheiten nach unten verschoben wird.

13. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 3x - 4$. Ändere die Vorschrift so ab, dass der Graph um
    a) 3 Einheiten nach oben verschoben wird.
    b) 3 Einheiten nach links verschoben wird.
    c) 3 Einheiten nach rechts verschoben wird.
    d) 3 Einheiten nach unten verschoben wird.
    e) 2 Einheiten nach rechts und 4 Einheiten nach oben verschoben wird.
    f) 3 Einheiten nach links und 2 Einheiten nach unten verschoben wird.

14. Bei den folgenden Beispielen wurde die Funktionsvorschrift geändert. Bei welcher Änderung wird dabei der Funktionsgraph um 5 Einheiten nach links verschoben ?
    a) $2x^2 + 3x$ wird zu $2x^2 + 3x - 5$
    b) $3x^2$ wird zu $3(x+5)^2 - 6$
    c) $2x^2 + 3x$ wird zu $2(x+5)^2 + 3(x+5) + 6$
    d) $3x$ wird zu $3x + 5$

15. Bei den folgenden Beispielen wurde die Funktionsvorschrift geändert. Bei welcher Änderung wird dabei der Funktionsgraph um 5 Einheiten nach rechts verschoben ?
    a) $3x$ wird zu $3x - 5$
    b) $3x$ wird zu $3(x+5)$
    c) $3x$ wird zu $3(x-5)$
    d) $3x$ wird zu $3x + 5$

16. Bestimme den Scheitelpunkt der folgenden quadratischen Funktionen.
    a) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = (x+2)^2 - 5$
    b) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = (x-3)^2 + 1$

17. Gib eine quadratische Funktion an, deren Scheitelpunkt in
    a) $(3|5)$ liegt.
    b) $(-2|-4)$ liegt.

18. Gib eine Funktionsvorschrift an, deren Parabel
    a) die y-Achse an der Stelle 4 schneidet.
    b) nach oben geöffnet ist.
    c) genau 1 Nullstelle hat.
    d) 2 Nullstellen hat.
    e) keine Nullstellen hat.
    f) den Scheitelpunkt $S = (3|4)$ hat.

19. Gegeben ist der Graph der Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 + 3x - 4$. Der Graph wird nun gespiegelt. Wie lautet die neue Vorschrift, wenn wir den Graphen
    a) an der x-Achse spiegeln ? $[-(x+1.5)^2 + 6.25]$
    b) an der y-Achse spiegeln ? $[(x-1.5)^2 - 6.25]$
    c) am Scheitelpunkt spiegeln ? $[-(x+1.5)^2 - 6.25]$

20. Die Parabel $y = -x^2 + 4x + 5$ wird zuerst um 180° gedreht und danach so verschoben, dass der Scheitelpunkt in $S = (6|6)$ liegt. Wie lautet die Gleichung der neuen Parabel ?

21. Gib eine Funktion 2.Grades an, deren Funktionsgraph nach unten geöffnet ist und deren Scheitelpunkt in $(2|-4)$ liegt.

22. Finde den Scheitelpunkt der Funktion $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ mit Hilfe von quadratischer Ergänzung.

23. (Zusatz) Finde den Scheitelpunkt der allgemeinen Funktion 2.Grades: $f(x) = ax^2 + bx + c$.

3 Die Ermittlung der Parameter

Manchmal sind gewisse Punkte auf der Parabel bekannt und wir möchten gerne die Funktionsvorschrift ermitteln. Diese Fragestellung führt zu Gleichungssystemen.

Beispielsaufgabe: Die Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ geht durch die Punkte $P_1(-2|15), P_2(1|0)$ und $P_3 = (3|10)$. Berechne die Parameter a, b und c.

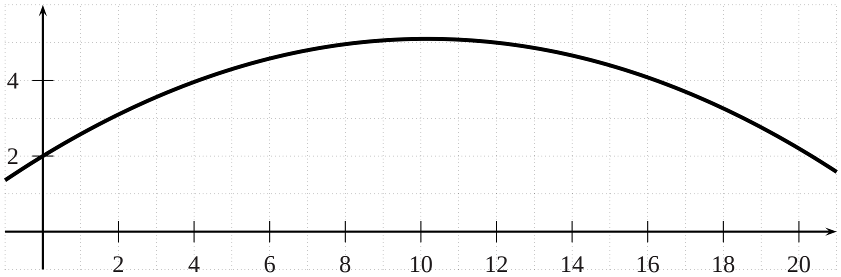
Übungen

24. Die Parabel mit der Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ geht durch die Punkte $(2|-5), (-1|-2)$ und $Q = (3|-14)$. Berechne die Parameter a, b und c. $[a = -2, b = 1, c = 1)]$

25. Die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + bx + c$ geht durch die Punkte $P(2|11)$ und $Q = (3|18)$. Berechne die Parameter b und c. $[b = 2, c = 3)]$

26. Eine Funktion 2-ten Grades hat die Nullstellen bei $x = 3$ und $x = -5$. Dazu geht der Graph durch den Punkt $(2|-7)$. Berechne die Parameter a, b und c. $[a = 1, b = 2 \text{ und } c = -15]$

27. Ein Kugelstösser stösst eine Kugel. Auf dem untenstehenden Graphen sehen wir die Flugbahn der Kurve (x-Achse: Weite am Boden in m, y-Achse: Höhe in m). Folgende Punkte des Graphen sind dabei bekannt: $P_1(0|2)$, $P_2(7|4.8)$ und $P_3(10|5.1)$.



a) Beschreibe den Verlauf der Kugel mit einer Funktion. $[f(x) = -0.03x^2 + 0.61x + 2]$

b) Berechne, wie weit die Kugel gestossen wurde. $[23.21\,\text{m}]$

c) Welches war die grösste Höhe (exakt), die von der Kugel erreicht wurde ? $[5.10\,\text{m}]$

28. Eine Parabel der Form $y = a(x-u)^2 + v$ hat den Scheitelpunkt in $S = (2|4)$ geht durch den Punkt $Q(3|-7)$. Bestimme die Funktionsvorschrift in der Scheitelpunkts- und in der Normalform.

$[y = -11(x-2)^2 + 4 = -11x^2 + 44x - 40]$

4 Extremwertaufgaben

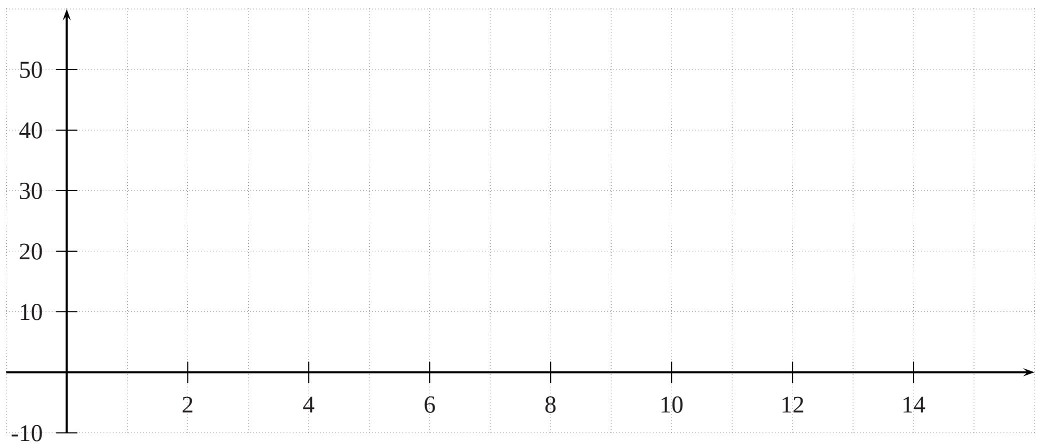
Bei einer Extremwertwertaufgabe ist immer eine Grösse so gesucht, dass eine andere Grösse möglichst gross oder klein ist. Wir betrachten in diesem Abschnitt Extremwertaufgaben, die zu Funktionen 2.Grades führen (das ist natürlich nicht bei allen Aufgaben so).

Beispiel: Berechne die Seitenlängen des Rechtecks vom Umfang $U = 30\,\text{cm}$, das den grössten Flächeninhalt besitzt.

- Zunächst einmal überzeugen wir uns davon, dass verschiedene Längen und Breiten zu verschiedenen Flächeninhalten führen:

l in cm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b in cm	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Fläche																

- Wir tragen alle Flächeninhalte ins untenstehende Koordinatensystem ein:



- Mit Ablesen erkennen wir, dass der maximale Flächeninhalt bei $l =$ ...... erreicht wird.
- Wir hätten dieses Ergebnis auch mit Berechnung erhalten können:

Übungen

29. Die Summe zweier positiver Zahlen sei 9. Bestimme darunter diejenigen Zahlen, deren Produkt am grössten ist. [4.5 und 4.5]

30. Die Summe aller Kanten einer quadratischen Säule (Quader mit quadratischer Grundfläche) misst 24 cm. Berechne die Kanten so, dass die Oberfläche maximal wird. [$a = b = c = 2\,\text{cm}$]

31. Ein Zaun von 50 m Länge soll einen rechteckigen Platz, der an eine Mauer grenzt, auf drei Seiten begrenzen. Welchen Flächeninhalt kann der Platz maximal haben ? [$312.5m^2$]

32. Eine ebene 400 m-Bahn soll so angelegt werden, dass sie ein Rechteck mit zwei angesetzten Halbkreisen begrenzt. Wie gross muss der Radius r sein und wie lang ist ein gerades Stück zwischen den Kurven, wenn
    a) das Rechteck maximalen Flächeninhalt haben soll ? [$100\,\text{m}, 31.83\,\text{m}$]
    b) das ganze Oval maximalen Flächeninhalt haben soll ? [$0\,\text{m}, 63.66\,\text{m}$]

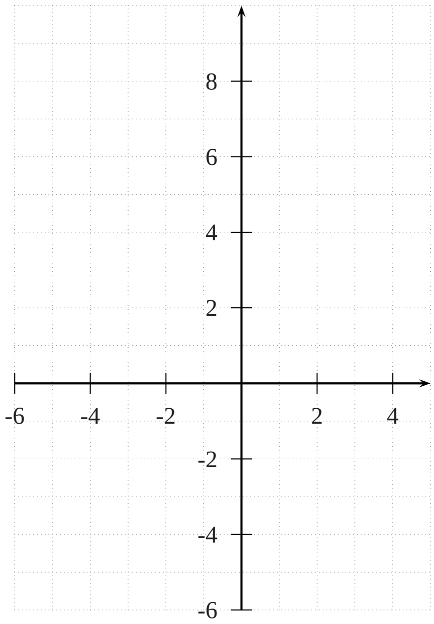
33. Ein Kino hat bei einem Eintrittspreis von Fr.12 durchschnittlich 240 BesucherInnen. Würde man den Eintrittspreis um Fr. 1.-,2.-,3.-,usw. erhöhen, so ginge die Besucherzahl um 10,20,30,usw. Personen zurück. Bei welchem Eintrittspreis sind die Einnahmen am grössten ? [18 Fr]

34. (Zusatz) Mit einem Faden der Länge u soll der Umfang eines Kreissektors gebildet werden. Für welchen Radius wird die Sektorfläche maximal und wie gross ist dann der Zentriwinkel ?

5 Schnittprobleme

In diesem Abschnitt werden Parabeln mit Geraden geschnitten.

Beispiel: Gegeben sind eine Parabel mit $y = x^2 + 2x - 3$ und eine Gerade mit $y = 3x - 1$. Bestimme rechnerisch und zeichnerisch die Schnittpunte der beiden Graphen. [(-1|-4) und (2|5)]

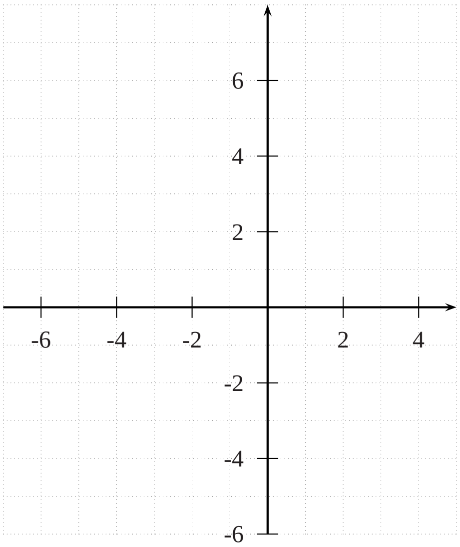

8
6
4
2
-6
-4
-2
2
4
-2
-4
-6

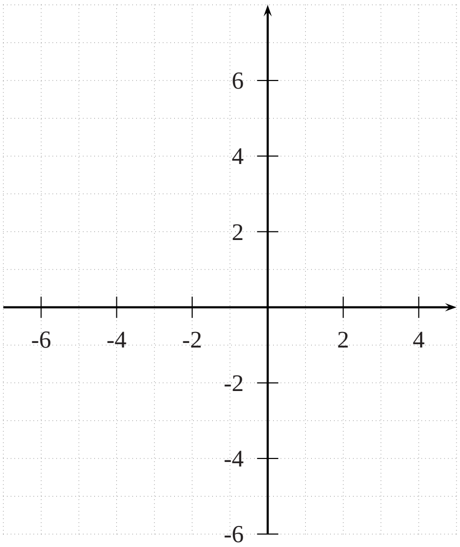
Übungen

35. Bestimme zeichnerisch und rechnerisch die Schnittpunkte der beiden Graphen.

    a) $y = x^2 + x - 3$ und $y = x + 1$ [(-2|-1) und (2|3)]

    b) $y = 2x^2 - 4x - 2$ und $y = -2x + 1$ [(-0.82|2.65) und (1.82|-2.65)]





Es geht nun um die Anzahl der Schnittpunkte. Wir nehmen noch einmal unser obiges Beispiel:

Beispiel: Gegeben sind eine Parabel mit $y = x^2 + 2x - 3$ und eine Gerade mit $y = 3x - 1$.

- **Berechne**: In wievielen Punkten schneiden sich die beiden Graphen ?

- Wie muss die Schnitthöhe mit der y-Achse gewählt werden, damit sich die Graphen in genau einem Punkt schneiden ? [$n = -3.25$]

- Wie muss die Steigung der Geraden gewählt werden, damit sich die Graphen in genau einem Punkt schneiden ? [nicht möglich]

Übungen

36. Berechne die Parameter so, dass sich die Graphen in genau einem Punkt schneiden.

    a) $y = ax^2 + 3x - 4$ und $y = x + 1$ $[a = -0.2]$

    b) $y = x^2 + bx + 2$ und $y = 2x - 3$ $[b_1 = -2.47$ und $b_2 = 6.47]$