2.4 lineare Gleichungssysteme

Inhaltsverzeichnis

1 Was ist ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten ?

Ein **Beispiel** eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten:

$$\left| \begin{array}{l} 2x+y=15 \\ x-4y=3 \end{array} \right|$$

- zwei Gleichungen ist klar, zwei Unbekannte (x und y) ebenfalls.
- Gleichungssystem: Unter System versteht man etwas Abgeschlossenes, in diesem Falle heisst das, dass die Gleichungen zusammengehören.
- linear bedeutet, dass die Unbekannten nur in der Form x, y und z vorkommen, also kein x^2, $\sqrt{y}, z^3$, usw. und auch keine Kombinationen wie z.B. xy, xyz, usw. enthalten.

Bei einem Gleichungssystem geht es um folgende Frage:

Frage: Was muss ich für x und y einsetzen, damit bei der ersten Gleichung links und rechts das Gleiche steht **und** bei der zweiten Gleichung links und rechts das Gleiche steht ?

Setzen wir bei unserem Beispiel $x = 7$ und $y = 1$:

- einsetzen in die obere Gleichung: $2 \cdot 7 + 1 = 15 \quad \checkmark$
- einsetzen in die untere Gleichung: $7 - 4 \cdot 1 = 3 \quad \checkmark$

Wir sehen, dass $x = 7$ und $y = 1$ das Gleichungssystem löst (Wie man diese Lösung ermittelt, sehen wir später).

Während die Lösung einer Gleichung wie $3x = 6$ eine Zahl ($x = 2$) ist, besteht die Lösung eines Gleichungssystems nun aus zwei Zahlen ($x = 7$ und $y = 1$). Wir notieren diese Lösung in der Form (7;1). Damit können wir schreiben: $\mathbf{L} = \{(7;1)\}$

Übungen

1. Für welche der folgenden Gleichungssyteme ist (3,-1) eine Lösung ?

   a) $\left| \begin{array}{l} x+y=2 \\ 2x+5y=1 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{l} 2x-y=7 \\ x-3y=3 \end{array} \right|$

   c) $\left| \begin{array}{l} 3x=6 \\ 2y=-2 \end{array} \right|$ d) $\left| \begin{array}{l} 6=7 \\ x-3y=6 \end{array} \right|$

2. Die folgenden Gleichungssysteme haben eine besonders einfache Form. Löse sie.

a) $\left| \begin{array}{l} 2x = 5 \\ 4y = 6 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{l} 2x - 4y = 0 \\ 4x = 8 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} 2x - 4y = 0 \\ 4y = 4 \end{array} \right|$ d) $\left| \begin{array}{l} 2 = 3 \\ 4x + y = 8 \end{array} \right|$

2 Wie lösen wir ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten ?

In diesem Abschnitt lernen wir, wie wir ein Gleichungssystem lösen können, d.h. wie wir herausfinden können, welche Werte wir für x und y einsetzen müssen, damit wir in beiden Gleichungen auf der linken und auf der rechten Seite das Gleiche erhalten.

Idee: Wir können die erste Gleichung nach x auflösen und das Ergebnis dann in die zweite Gleichung einsetzen. Diese Methode nennen wir **Einsetzungsmethode**.

Beispiel

$$\left| \begin{array}{l} x - 5 = 5y - 25 \\ x + 3 = 3y + 9 \end{array} \right|$$

Übungen

3. Löse die folgenden Gleichungssysteme mit der Einsetzungsmethode und kontrolliere anschliessend Dein Ergebnis !

a) $\left| \begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=3 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{l} 2x+4y=6 \\ x-3y=1 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} x-8y=-6 \\ x-3y=4 \end{array} \right|$ d) $\left| \begin{array}{l} \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{4y}{3}=0 \\ 5-y=\dfrac{x+y}{2} \end{array} \right|$

[(2;-1),(2.2;0.4),(10;2),(55;-15)]

4. Bestimme die Parameter a und b so, dass das System die Lösung $x=4, y=-4$ besitzt.

$$\left| \begin{array}{l} x+ay=1 \\ bx+2y=4 \end{array} \right|$$

[$a=0.75, b=3$]

5. Vor 5 Jahren war der Vater 5 mal so alt wie der Sohn. In 3 Jahren wird er 3 Mal so alt sein wie der Sohn. Wie alt sind die beiden jetzt? [Vater: 45 Jahre, Sohn: 13 Jahre]

6. Wieviel 12 prozentigen Spiritus und wieviel 84 prozentigen Spiritus müssen wir nehmen, um 7200 Liter 18 prozentigen Spiritus zu erhalten? [$6600l, 600l$]

7. Wenn Claudia ihrer Freundin Corinne 15 Nüsse gäbe, hätten beide gleich viele Nüsse. Gäbe aber Corinne ihrer Freundin 15 Nüsse, so hätte Claudia doppelt so viele Nüsse wie Corinne. Wie viele Nüsse haben die beiden ? [Claudia: 105, Corinne 75]

8. (Aufgabe aus China, gestellt um 250 v. Christus) Eine Anzahl Leute kaufte gemeinsam eine Menge Waren. Hätte jeder von ihnen 8 Kasch (damalige Währungseinheit) bezahlt, so wären es 3 Kasch zu viel gewesen. Hätte dagegen jeder 7 Kasch entrichtet, so wären es 4 Kasch zuwenig gewesen. Wie viele Personen waren es und was kostete die gekaufte Warenmenge? [7 Personen, 53 Kasch]

9. Adam hat doppelt so viele Brüder wie Schwestern. Seine Schwester Eva hat dreimal so viele Brüder wie Schwestern. Wie viele Kinder haben die Eltern von Adam und Eva? [9 Söhne, 4 Töchter]

10. Zwei Maschinen produzieren gleiche Schrauben. Für die Herstellung von 1000 Schrauben müssen zunächst beide Maschinen für 6 Stunden und anschliessend noch die 1. Maschine alleine für 3 Stunden eingesetzt werden. Es kann aber auch die 1. Maschine für 6 Stunden und die 2. Maschine für 8 Stunden eingesetzt werden, um die gleiche Menge Schrauben zu erhalten. In welcher Zeit stellt jede Maschine alleine 1000 Schrauben her? [1.Maschine: 18 Stunden, 2.Maschine: 12 Stunden]

3 Eine zweite Methode, um das Gleichungssystem zu lösen.

Im Abschnitt 2 haben wir die Einsetzungsmethode kennengelernt. Sie ist einfach zu merken und die naheliegenste Methode zur Ermittlung der Lösung. Sobald jedoch Brüche auftauchen, ist der Rechenaufwand beträchtlich und die Rechnung wird auch fehleranfällig.

Deshalb lernen wir in diesem Abschnitt eine neue Lösungsmethode kennen, die sogenannte **Additionsmethode**. Wir betrachten noch einmal das Beispiel aus Abschnitt 2.

Beispiel

$$\left| \begin{array}{l} x-5=5y-25 \\ x+3=3y+9 \end{array} \right|$$

Offensichtlich erhalten wir das richtige Ergebnis ? Warum aber dürfen wir einfach Gleichungen zusammenzählen, ohne dass die Lösungsmenge verändert wird ? Diese Frage ist nicht so einfach zu beantworten. Als „Begründung “diene folgende kleine Rechnung:

Übungen

11. Löse die folgenden Gleichungssysteme mit der Additionsmethode und vergleiche mit der Aufgabe 3 !

a) $\left|\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=3 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} 2x+4y=6 \\ x-3y=1 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} x-8y=-6 \\ x-3y=4 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{2}+\dfrac{4y}{3}=0 \\ 5-y=\dfrac{x+y}{2} \end{array}\right|$

[(2;-1),(2.2;0.4),(10;2),(55;-15)]

12. Löse die folgenden Gleichungssysteme.

a) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4}{y}=1 \\ \dfrac{x}{2+\frac{1}{y}}=\dfrac{y}{3-\frac{1}{x}} \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} (x+30):(x+15)=(y+1):(y-2) \\ (x-17):(y-3)=(x+7):(y-9) \end{array}\right|$

[(6;8);(5;6)]

4 Die Substitutionsmethode

Beispiel:

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=17 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1 \end{array}\right|$$

Übungen

13. Löse die folgenden Gleichungssysteme:

a) $\left| \begin{array}{l} \frac{3}{x}+\frac{8}{y}=\frac{1}{4} \\ \frac{15}{x}-\frac{4}{y}=\frac{1}{3} \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{l} \frac{1}{x}-\frac{1}{4y}=5 \\ \frac{2}{3x}+\frac{1}{y}=8 \end{array} \right|$

5 Wie lösen wir ein Gleichungssystem mit Parametern ?

Unter Parametern verstehen wir Variabeln, nach denen aber nicht aufgelöst werden soll. Wir „schleppen sie einfach mit “. Ein Gleichungssystem mit Parametern können wir mit der gleichen Vorgehensweise lösen wie ein Gleichungssystem ohne Parameter.

Beispiel

$$\left| \begin{array}{l} 4x+6y=4 \\ 2bx-4y=2 \end{array} \right|$$

- Den x-Wert in die erste Gleichung einsetzen:
  $4\frac{7}{4+3b}+6y=4$
  $\Rightarrow 6y=4-4\frac{7}{4+3b}=\frac{4(4+3b)}{4+3b}-\frac{28}{4+3b}=\frac{16+12b-28}{4+3b}=\frac{-12+12b}{4+3b}=\frac{12(b-1)}{4+3b}$
  $\Rightarrow \underline{\underline{y}}=\frac{12(b-1)}{6(4+3b)}=\underline{\underline{\frac{2(b-1)}{4+3b}}}$
- Den y-Wert haben wir nur sehr mühsam erhalten. Einfacher geht es, wenn wir nochmals von vorne beginnen und die Additionsmethode ein zweites Mal anwenden:

Merke: Bei einem Gleichungssystem mit Parametern ist es meistens einfacher, nochmals von vorne zu beginnen als einzusetzen !

Übungen

14. Löse die folgenden Gleichungssysteme nach x und y auf.

a) $\left| \begin{array}{l} 4x+6y=3 \\ bx-2y=1 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{l} 2ax+y=1 \\ x+y=2 \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{l} bx+y=b \\ x+y=2 \end{array} \right|$ d) $\left| \begin{array}{l} px+y=0 \\ x-py=0 \end{array} \right|$

$[x=\frac{6}{4+3b}, y=\frac{3b-4}{6b+8}; x=-\frac{1}{2a-1}, y=\frac{1-4a}{1-2a}; x=\frac{b-2}{b-1}, y=-\frac{b}{1-b}; x=0, y=0]$

6 Die Definition eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

Definition 1 *Ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten können wir allgemein folgendermassen notieren:*

$$\left| \begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array} \right|$$

(Die Zahlenbereiche für die Parameter a, b, c, d, e und f lassen wir der Einfachheit halber weg)

15. Entscheide, ob ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten vorliegt ! Falls ja, dann bestimme a, b, c, d, e und f !

a) $\left| \begin{array}{c} -x+3y=0 \\ x=6 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{c} 3y=5 \\ 4y=6x \end{array} \right|$

c) $\left| \begin{array}{c} 2xy=5 \\ 4y=6 \end{array} \right|$ d) $\left| \begin{array}{c} 2x=5y \\ 4x=6z \end{array} \right|$

7 Die allgemeine Lösung

Wir ermitteln bei der folgenden Übung die Lösung des allgemeinen Gleichungssystems mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten:

Übung

16. Löse folgendes Gleichungssystem nach x und nach y auf:

$$\left| \begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array} \right|$$

Die Ergebnisse lauten:

$$\boxed{x = \frac{ce - bf}{ae - bd}} \boxed{y = \frac{af - cd}{ae - bd}}$$

Wir haben bei der obigen Übung eine Formel herausgefunden, mit der wir direkt die Lösungen berechnen können.

Übungen

17. Löse die folgenden Gleichungssysteme mit der Lösungsformel und vergleiche Deine Ergebnisse mit der Aufgabe 3 !

a) $\left| \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{l} 2x + 4y = 6 \\ x - 3y = 1 \end{array} \right|$

8 Wieviele Lösungen hat ein lin. Gl.-system mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten ?

Wir betrachten das folgende Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 2 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right|$$

8.1 Lineare Gleichung mit 2 Unbekannten

Nehmen wir zuerst die obere Gleichung. Es liegt eine lineare Gleichung mit 2 Unbekannten vor. Linear, weil die beiden Unbekannten (x,y) den Exponenten 1 haben. Die untere Gleichung ist damit ebenfalls eine lineare Gleichung mit 2 Unbekannten. Allgemein notieren wir eine lineare Gleichung mit 2 Unbekannten folgendermassen:

$$ax + by = c$$

8.2 Was ist eine Lösung einer linearen Gleichung mit 2 Unbekannten ?

Wir haben schon die Gleichung $2x = 4$ gelöst. Hier ist 2 eine Lösung, weil wenn wir 2 in die Gleichung einsetzen, erhalten wir links und rechts das Gleiche: $2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow 4 = 4$.
Bei der Gleichung $2x + y = 4$ haben wir nun 2 Unbekannte. Wir müssen nun für x und für y eine Zahl einsetzen und schauen, ob es links und rechts das Gleiche gibt:

-
  - $x = 1$ und $y = 2$.
  - Einsetzen: $2 \cdot 1 + 2 = 4 \Rightarrow 2 + 2 = 4 \Rightarrow 4 = 4$.
  - Wir erhalten links und rechts das Gleiche, somit ist $x = 1$ und $y = 2$ eine Lösung der Gleichung (wir schreiben $(1;2)$).
-
  - $x = 2$ und $y = 2$.
  - Einsetzen: $2 \cdot 2 + 2 = 4 \Rightarrow 4 + 2 = 4 \Rightarrow 6 = 4$.
  - Wir erhalten links und rechts nicht das Gleiche, somit ist $x = 2$ und $y = 2$ keine Lösung der Gleichung.

8.3 Wie finde ich eine Lösung einer linearen Gleichung mit 2 Unbekannten ?

Gegeben ist die Gleichung $x + 3y = 5$. Wir können nun ganz einfach eine Lösung finden:

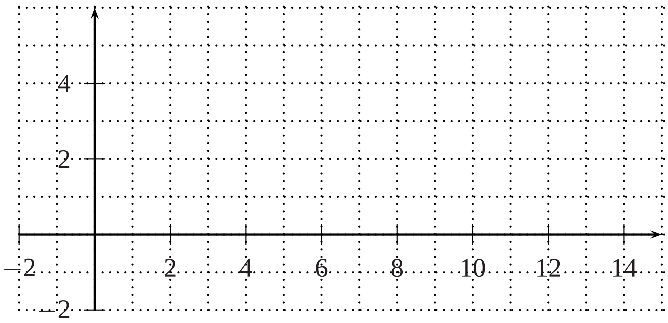
- Nimm für x irgendeinen Wert, z.B. 8.
- Setze den Wert in die Gleichung ein: $8 + 3y = 5$
- Löse die Gleichung in 2.) nach y auf: $8 + 3y = 5 \Rightarrow 3y = -3 \Rightarrow y = -1$.
- Wir haben nun einen x- und einen y-Wert: $x = 8, y = -1$. Damit lautet eine Lösung: $(8;-1)$.

8.4 Wie sieht die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit 2 Unbekannten graphisch aus ?

Gegeben ist die Gleichung $2x + 4y = 6$. Wir berechnen nun 3 Lösungen:

	1.Lösung	2.Lösung	3.Lösung
x-Wert bestimmen	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$
Einsetzen:	$2 \cdot 1 + 4y = 6$	$2 \cdot 2 + 4y = 6$	$2 \cdot 3 + 4y = 6$
Ausrechnen:	$2 + 4y = 6$	$4 + 4y = 6$	$6 + 4y = 6$
nach y auflösen:	$4y = 4$	$4y = 2$	$4y = 0$
nach y auflösen:	$y = 1$	$y = 0.5$	$y = 0$
x- und y-Wert:	$x = 1, y = 1$	$x = 2, y = 0.54$	$x = 3, y = 0$
Lösung:	(1;1)	(2;0.5)	(3;0)

Wir zeichnen diese drei Werte nun in ein Koordinatensystem:



Beobachtung: alle drei Punkte liegen auf einer Geraden. Jeder Punkt auf der Geraden ist eine Lösung der Gleichung.

Daraus schliessen wir: **Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit 2 Unbekannten ist eine Gerade.**

Übungen

18. Notiere eine Gleichung, die nicht eine lineare Gleichung mit 2 Unbekannten ist, weil
    a) die Anzahl der Unbekannten nicht stimmt.
    b) die Linearität verletzt ist.
19. Bestimme die Werte der Parameter a, b und c !

    a) $y = 4x + 5$ b) $3 = 2y - 6x$ c) $\frac{3}{4} = \frac{2x}{3} + \frac{y}{6}$
20. Stelle die Lösungsmenge graphisch dar !

    a) $y = 4x + 5$ b) $3 = 2y - 6x$ c) $\frac{3}{4} = \frac{2x}{3} + \frac{y}{6}$
21. Die Lösungsmengen der folgenden Aufgaben sind Geraden. Welche Steigung und welchen Schnittpunkt mit der y-Achse haben die Geraden ? Kontrolle zeichnerisch Dein Ergebnis.

    a) $y = 4x + 5$ b) $3 = 2y - 6x$

8.5 Wie kommen wir von einer linearen Gleichung mit 2 Unbekannten zu einer linearen Funktion ?

Eine Funktion 1.Grades hat die Form:

$$y = mx + n$$

Eine lineare Gleichung hat die Form:

$$ax + by = c$$

Wir kommen also von der linearen Gleichung auf die Funktion 1.Grades, indem wir die Gleichung nach y auflösen.

- Gegeben ist die lineare Gleichung $8x + 4y = 20$.
- Wir lösen nach y auf: $8x + 4y = 20 \Rightarrow 4y = 20 - 8x \Rightarrow 4y = 20 - 8x \Rightarrow y = \frac{20 - 8x}{4} \Rightarrow y = 5 - 2x \Rightarrow y = -2x + 5$
- Wir können nun folgern: Die Lösungsmenge der Gleichung $8x + 4y = 20$ ist eine Gerade. Die Gerade hat die Steiung -2 und den Schnittpunkt mit der y-Achse bei 5.

8.6 Die Anzahl Lösungen eines Gleichungssystems

Gegeben ist das allgemeine Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{ll} (1) & ax+by=c \\ (2) & dx+ey=f \end{array} \right|$$

- Die erste Gleichung nach y aufgelöst ergibt: $ax+by=c \Rightarrow by=c-ax \Rightarrow y=\frac{c-ax}{b} \Rightarrow y=\frac{c}{b}-\frac{ax}{b} \Rightarrow y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$.
- Die zweite Gleichung nach y aufgelöst ergibt: $dx+ey=f \Rightarrow ey=f-dx \Rightarrow y=\frac{f-dx}{e} \Rightarrow y=\frac{f}{e}-\frac{dx}{e} \Rightarrow y=-\frac{d}{e}x+\frac{f}{e}$.
- Die Lösungsmenge der ersten Gleichung ist eine Gerade mit der Steigung $-a/b$ und dem Schnittpunkt mit der y-Achse bei c/b.
- Die Lösungsmenge der zweiten Gleichung ist eine Gerade mit der Steigung $-d/e$ und dem Schnittpunkt mit der y-Achse bei f/e.

Wir wissen, dass der Schnittpunkt der beiden Geraden die Lösung des Gleichungssystems ist. Es gibt nun drei Fälle:

- Fall 1: Die Geraden haben eine verschiedene Steigung und schneiden sich genau einmal (d.h. es gibt genau einen Schnittpunkt und damit eine Lösung)
- Fall 2: Die Geraden haben die gleiche Steigung
  - und liegen übereinander (d.h. es gibt unendlich viele Schnittpunkte und damit unendlich viele Lösungen)
  - aber liegen nicht übereinander (d.h. es gibt keinen Schnittpunkt und damit keine Lösung)

Fall 1: Die Steigung ist verschieden $\Rightarrow -\frac{a}{b} \neq -\frac{d}{e} \Rightarrow \frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}$.

$$\boxed{\text{genau 1 Lösung, falls } \frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}}$$

Fall 2(a):

- Die Steigung gleich $\Rightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{d}{e} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{e}$.
- Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist gleich $\Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{f}{e}$

Damit erhalten wir:

$$\boxed{\text{unendlich viele Lösungen, falls } \frac{a}{b} = \frac{d}{e} \text{ und } \frac{c}{b} = \frac{f}{e}}$$

Fall 2(b):

- Die Steigung gleich $\Rightarrow -\frac{a}{b} = -\frac{d}{e} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{d}{e}$.
- Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist nicht gleich $\Rightarrow \frac{c}{b} \neq \frac{f}{e}$

Damit erhalten wir:

$$\boxed{\text{keine Lösung, falls } \frac{a}{b} = \frac{d}{e} \text{ und } \frac{c}{b} \neq \frac{f}{e}}$$

Übungen

22. Löse das folgende Gleichungssystem zeichnerisch (Ablesen des Schnittpunktes) ! Überprüfe durch Einsetzen !

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{array} \right|$$

23. Bestimme zeichnerisch und rechnerisch die Anzahl Lösungen der folgenden Gleichungssysteme.

a) $\left| \begin{array}{l} x - 5y = 7 \\ x = 5y + 7 \end{array} \right|$ b) $\left| \begin{array}{l} -4x + 6y = 5 \\ 6x - 9y = 8 \end{array} \right|$ c) $\left| \begin{array}{l} 3x + 6y = 5 \\ 6x - 2y = 2 \end{array} \right|$

24. Welcher Wert muss für a eingesetzt werden, damit das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} 2ax + 3y = 4 \\ 3ax - 2y = 3 \end{array} \right|$$

a) Genau 1 Lösung hat ? [$a \neq 0$]

b) keine Lösung hat ? [$a = 0$]

c) unendlich viele Lösungen hat ? [für keine reelle Zahl der Fall]

9 lineare Gleichungssysteme mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten

Übung

25. Folgende Gleichungssysteme mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten haben eine besonders einfache Form. Ermittle jeweils die Lösungsmenge.

a) $\left| \begin{array}{l} 8x - 7y + 10z = 9 \\ 5y + 6z = 0 \\ 6z = 21 \end{array} \right|$

b) $\left| \begin{array}{l} 13x = 156 \\ 5x + 6y = 0 \\ 9x + 11y + 2z = 36 \end{array} \right|$

[$x = -6.925, y = -4.2, z = 3.5; x = 12, y = -10, z = 19$]

Bei den obigen Situationen lagen spezielle Gleichungssystem vor, die kein zusätzliches Wissen erforderten. Wie finden wir aber die Lösung, wenn keine so spezielle Situation vorliegt ? Betrachten wir dazu ein Beispiel.

Beispiel

Gegeben ist das folgende Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{ll} (1) & x + y + z = 60 \\ (2) & x - 3y + 2z = -4 \\ (3) & 2x + 5y - 5z = 68 \end{array} \right|$$

Übungen

26. Löse die folgenden Gleichungssysteme.

a) $\left|\begin{array}{l} 7x-6y+5z=18 \\ 5x+3y-4z=28 \\ 8x+2y+3z=26 \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=6 \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}-\frac{z}{10}=3 \\ x-\frac{y}{6}+\frac{z}{2}=8 \end{array}\right|$

c) $\left|\begin{array}{l} x+y+z=33 \\ 3x-8y+7z=26 \\ 5y-3z=19 \end{array}\right|$

d) $\left|\begin{array}{l} x-2y+3z=6 \\ 8x-3y+4z=6 \\ 9x+5y-7z=6 \end{array}\right|$

[$x=4, y=0, z=-2; x=4, y=6, z=10; x=10, y=11, z=12; x=1, y=26, z=19$]

27. Hier sind a, b, c Parameter. Aufzulösen ist nach x, y, z.

a) $\left|\begin{array}{l} x+y+z=a+b+c \\ x+y=2c \\ y+z=2a \end{array}\right|$

b) $\left|\begin{array}{l} x+y+z=4a+6b \\ 2x+3y-z=3a+5b \\ 4y+3z=10a+17b \end{array}\right|$

[$x=-a+b+c, y=a-b+c, z=a+b-c; x=a+b, y=a+2b, z=2a+3b$]

28. Gesucht sind drei Zahlen x, y und z, deren Summe 311 ist. Dabei unterscheiden sich die ersten beiden Zahlen um 51, die dritte ist um 21 grösser als die erste und die zweite zusammen. Bestimme die Zahlen. [47,98,166 (2.Lösung: 98,47,166)].

29. Die 24 Kinder in Petras Klasse stammen aus drei Jahrgängen. Der älteste Jahrgang enthält 8 Kinder weniger als der mittlere. Zum jüngsten Jahrgang gehören 4 Kinder weniger als alle anderen zusammen. Wie viele Kinder sind in jedem Jahrgang? [3,11,10]

30. Eine Bergbahn verlangt für Berg- und Talfahrt zusammen 30 Franken, für die Bergfahrt allein 22,50 Franken und für die Talfahrt alleine 15 Franken. An einem Sonntag führen im ganzen 680 Zahlende hinauf und 520 hinab. Es wurde 19650 Franken eingenommen. Wie viele Billette jeder Art wurden gelöst? [460,220,60]

10 Textaufgaben, die auf nichtlineare Gleichungssysteme führen

Beispiel: Zwei Maschinen produzieren gleiche Schrauben. Für die Herstellung von 1000 Schrauben müssen zunächst beide Maschinen für 6 Stunden und anschliessend noch die 1. Maschine alleine für 3 Stunden eingesetzt werden. Es kann aber auch die 1. Maschine für 6 Stunden und die 2. Maschine für 8 Stunden eingesetzt werden, um die gleiche Menge Schrauben zu erhalten. In welcher Zeit stellt jede Maschine alleine 1000 Schrauben her? [1.Maschine: 18 Stunden, 2.Maschine: 12 Stunden]

Übungen

31. Ein kleines Schwimmbecken kann durch zwei Röhren gefüllt werden. Die erste liefert 70 Liter pro Minute. Sind beide Röhren gleichzeitig geöffnet, so ist das Becken nach 4 Stunden voll. Werden aber beide Röhren gleichzeitig geöffnet und die erste nach 1 Stunden 20 Minuten geschlossen, so braucht die zweite noch 5 Stunden, um den Behälter zu füllen. Wie gross ist der Beckeninhalt und wieviel Wasser liefert die 2. Röhre in der Minute? [36000 Liter, 80 l/min]

32. Ein Wasserbehälter kann durch drei Zuleitungen gefüllt werden, und zwar durch A und B zusammen in 20, durch A und C zusammen in 40 und durch alle drei zusammen in 15 Minuten. In wie vielen Minuten wird der Behälter durch jede Leitung einzeln gefüllt? [A:120 Min,B:24 Min und C:60 Min]

33. Bei dieser Aufgabe kann das Gleichungssystem mit dem TR gelöst werden. Ein Becken kann durch drei Zuleitungen gefüllt werden. Die erste Zuleitung hat einen Durchfluss von 8 Kubikmetern pro Stunde. Läuft die erste Leitung 2h und die zweite auch 2h, so ist das Becken voll. Läuft die erste

Leitung 3h und die dritte 2h, so ist das Becken voll. Läuft die erste Leitung 1h, die zweite 1h und die dritte 2h, so ist das Becken voll. Welchen Durchfluss haben die zweite und die dritte Leitung? Wie gross ist das Becken? [2.L:16 m^3/h,3.L:12 m^3/h,$V_B = 48\,m^3$]

34. (Zusatz) Auf einen Heuboden soll die Ernte eingelagert werden. Um das Heu vom Erdboden nach oben zu befördern, muss eine Hubarbeit von 700kJ verrichtet werden. Es stehen drei Förderbänder zum Transport des Heus zur Verfügung. Es können nur jeweils zwei Bänder gemeinsam betrieben werden.

    - Wird das erste Band zusammen mit dem zweiten betrieben, so dauert die Befüllung des Heubodens 23 Minuten und 20 Sekunden.
    - Werden das erste und dritte Band betrieben, so dauert es 16 Min, 40 Sekunden.
    - Werden das zweite und das dritte Band betrieben, so dauert es 14 Min, 35Sekunden.

    Welche Leistung (Rechne mit kJ/s) haben die Förderbänder jeweils? [1.B:0.2kJ/s,2.B:0.3kJ/s,3.B:0.5kJ/s]

35. (Zusatz) Theo und Thea packen zusammen 150 Geschenke ein. Dazu brauchen sie 8 Stunden. Ginge Thea bereits nach 6 Stunden, so würde Theo weitere 5 Stunden für die restlichen Geschenke benötigen. Wie lange bräuchten die beiden jeweils, um die Geschenke alleine einzupacken? [Theo: 20h,Thea: 13h 20min]

11 nichtlineare Gleichungssysteme

In diesem Abschnitt schauen wir uns ein paar ausgewählte nichtlineare Gleichungssysteme an.

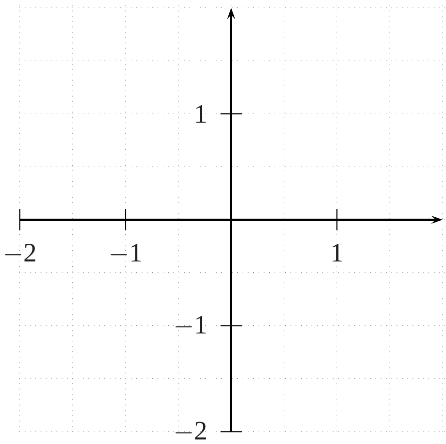
Beispiel

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{l} x+y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{array} \right| \qquad [\mathbf{L}=\{(1;0),(0;1)\}]$$

- Ermittle die Lösungsmenge zeichnerisch (Die Tabelle ist für die untere Gleichung des Systems).

x	-1	-0.5	0	0.5	1
y_1					
y_2					



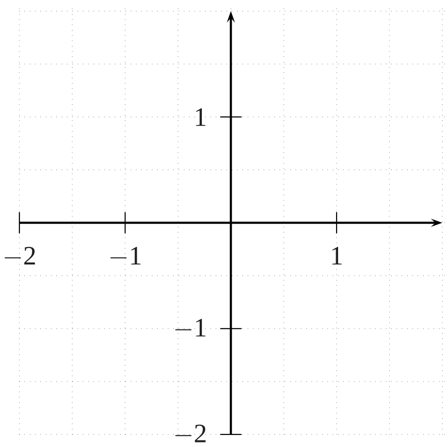
- Ermittle die Lösungsmenge rechnerisch.

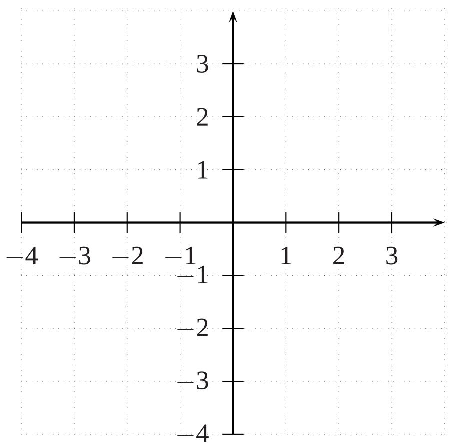
Übungen

36. Löse die folgenden Gleichungssysteme zeichnerisch und rechnerisch.

a) $\left| \begin{array}{l} y - x = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right|$ $[\mathbf{L} = \{(-1;0),(0;1)\}]$

b) $\left| \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{array} \right|$ $[\mathbf{L} = \{(-1;2),(2;-1)\}]$

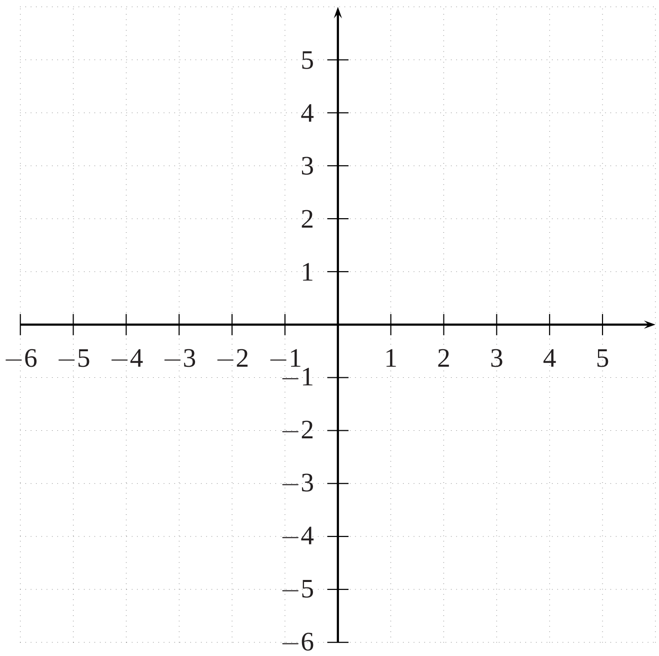




37. (Zusatz) Löse folgendes Gleichungssystem zeichnerisch und rechnerisch.

$[\mathbf{L} = \{(-0.98;-0.98);(-0.98;0.98);(0.98;-0.98);(0.98;0.98)\}]$

$$\left| \begin{array}{l} 2x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array} \right|$$



12 Ein Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Unbekannten

Zum Abschluss dieses Themas schauen wir uns noch ein Gleichungssystem mit vier Gleichungen und vier Unbekannten an:

$$\left| \begin{array}{lcl} w+x-y+z & = & 16 \\ 3w-2x+9y-z & = & 11 \\ 4w-3x+6y+2z & = & 13 \\ 6w-4x+2y+3z & = & 10 \end{array} \right|$$

[w=5, x=9, y=2, z=4]