Thema aus dem Bereich Algebra -
2.3 Gleichungen III

Inhaltsverzeichnis

1 Quadrierte Gleichungen mit einer Unbekannten

Satz 1 *Die Lösungsmenge einer Gleichung $A^2 = B^2$, wobei A und B Polynome sind, ist die Vereinigung der Lösungsmengen der Gleichungen $A = B$ und $A = -B$.*

Beispiel 1

Beispiel 2

Übungen

1. Gib jeweils die Lösungsmenge in der Form $\mathbf{L} = \{...\}$ an.
   a) $(3x-16)^2 = (4x-19)^2$ $[\mathbf{L} = \{3,5\}]$
   b) $(x+6)^2 = (x+7)^2$ $[\mathbf{L} = -6.5]$
   c) $(7x-5)^2 = (2x+5)^2$ $[\mathbf{L} = \{0,2\}]$
   d) $x^2 = (5x-18)^2$ $[\mathbf{L} = \{3,4.5\}]$
   e) $(8-x)^2 = 144$ $[\mathbf{L} = \{-4,20\}]$
   f) $(x-11)^2 = 15$ $[\mathbf{L} = \{11 \pm \sqrt{15}\}]$
   g) $x^4 = 121$ $[\mathbf{L} = \pm\sqrt{11}]$
   h) $9x^4 = (5x^2-2)^2$ $[\mathbf{L} = \{\pm 1, \pm 1/2\}]$
2. Die Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist doppelt so gross wie der Hypotenusenabschnitt. Berechne die Höhe und die Hypothenusenabschnitte so, dass der Dreiecksinhalt $9.8\,\mathrm{dm}^2$ misst.
3. In einem Quader ist eine Kante 4 mal, eine andere 8 mal so lang wie die kürzeste Kante. Wie lang sind die Kanten, wenn
   a) die Quaderoberfläche $5.5\,\mathrm{m}^2$ misst ? $[0.25\,\mathrm{m}, 1\,\mathrm{m}, 2\,\mathrm{m}]$
   b) die Körperdiagonale $6\,\mathrm{m}$ misst ? $[2/3\,\mathrm{m}, 8/3\,\mathrm{m}, 16/3\,\mathrm{m}]$

4. Ein gleichseitiges Dreieck soll den Flächeninhalt $1\,\mathrm{m}^2$ haben. Berechne seine Seite. [$x \approx 1.52\,\mathrm{m}$]
5. Eine quadratische Pyramide hat lauter gleich lange Kanten. Ihre Oberfläche misst $7.2\,\mathrm{m}^2$. Berechne die Kantenlänge. [$x \approx 1.62\,\mathrm{m}$]

2 Wurzelgleichungen

2.1 Definition einer Wurzelgleichung

Definition 1 *Unter einem Wurzelterm verstehen wir einen Term, der mindestens 1 Wurzelzeichen enthält.*

Beispiele

- $\sqrt{a^3b^3}$
- $\sqrt{1+\sqrt{2}}$

Definition 2 *Unter einer Wurzelgleichung verstehen wir eine Gleichung mit mindestens einem Wurzelterm.*

Beispiele

- $\sqrt{a^3b^3} = \sqrt{ax^2}$
- $\sqrt{1+\sqrt{2}} = \sqrt{x+\sqrt{2}}$

In der Folge betrachten wir nur Wurzelgleichungen mit einer Unbekannten.

2.2 Die Wurzel wird mit quadrieren eliminiert

$$x+1 = \sqrt{2x+5}$$

Wir haben zwei Lösungen für die Gleichung erhalten, aber nur eine Lösung erfüllt die Gleichung. Quadrieren ist **nicht immer** eine Äquivalenzumformung, sondern kann auch eine **Gewinnumformung** sein, wenn Lösungen dazukommen. Es gehen aber sicher keine Lösungen verloren. Ob die Lösungsmenge gleich bleibt oder ob Lösungen dazukommen, hängt von der Gleichung ab. Für uns heisst das, dass wir die Lösungen einer Gleichung **immer kontrollieren** müssen, wenn auf dem Lösungsweg quadriert wurde.

weitere Beispiele

- Die Gleichung $x = 5$ hat die Lösungsmenge $\mathbf{L} = \{5\}$, während die Gleichung $x^2 = 25$ die Lösungsmenge $\mathbf{L} = \{\pm 5\}$
- Die Gleichung $5 = -5$ hat keine Lösung (nichterfüllbar), während bei der Gleichung $25 = 25$ alle Elemente der Definitionsmenge eine Lösung sind (allgemeingültig).

Satz 2 *Wird auf beiden Seiten einer Gleichung G_1 mit der Lösungsmenge $\mathbf{L}_1$ quadriert, so gilt für die neue Lösungmenge $\mathbf{L}_2$:*

Beweis

Übungen

6. Finde die Lösungsmenge der folgenden Übungen in **R**. Gib Dein Ergebnis in der Form **L** = {...} an.

   a) $\sqrt{1-x} = 5$ [$\mathbf{L} = \{-24\}$] b) $\sqrt{x^2 + \frac{9}{8}} = \frac{9}{8}$ [$\mathbf{L} = \{\pm 3/8\}$]

   c) $4 + 9\sqrt{x^2+9} = 49$ [$\mathbf{L} = \{\pm 4\}$] d) $\sqrt{3x^2 - 50} = -x$ [$\mathbf{L} = \{-5\}$]

   e) $2\sqrt{x^2 - x} = 2x + 1$ [$\mathbf{L} = \{-1/8\}$]

7. Finde die Lösungsmenge in **R**. Gib Dein Ergebnis in der Form **L** = {...} an.

   a) $\sqrt{x+5} = \sqrt{4-x}$ [$\mathbf{L} = \{-1/2\}$] b) $\sqrt{x(x-4)} = 2\sqrt{1-x}$ [$\mathbf{L} = \{-2\}$]

   c) $10\sqrt{40-x} = 40\sqrt{10-x}$ [$\mathbf{L} = \{8\}$] d) $\sqrt{3x} - \sqrt{3+x} = 0$ [$\mathbf{L} = \{3/2\}$]

8. Finde die Lösungsmenge in **R**. Gib Dein Ergebnis in der Form **L** = {...} an.

   a) $\sqrt{x} = \sqrt{x+8} - 2$ [$\mathbf{L} = \{1\}$] b) $\sqrt{x+7} = \sqrt{x+2} - 1$ [$\mathbf{L} = \{\}$]

   c) $\sqrt{x-4} - \sqrt{x+11} + 3 = 0$ [$\mathbf{L} = \{5\}$] d) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+10} = 7$ [$\mathbf{L} = \{6\}$]

3 Gleichungen 2.Grades mit einer Unbekannten

3.1 Definition der Gleichung 2.Grades

Welche der folgenden Gleichungen wollen wir als Gleichungen 2.Grades bezeichnen ?

- $3x^2 + 4x - 2 = 0$
- $3x^2 + 4x - 2 = -x$
- $3x^2 - 2 = 0$
- $2x^2 + 2x - 3 = x^2$
- $(x-2)^2 + 3x = 0$
- $x^3 + x^2 + x + 1 = x^3$
- $x^3 = 4$

Definition 3 *Eine Gleichung heisst* ***Gleichung 2.Grades****, wenn sie durch Äquivalenzumformungen auf folgende Form gebracht werden kann:*

Übungen

9. Überprüfe, ob es sich bei den folgenden Gleichungen um Gleichungen 2.Grades handelt. Bestimme gegebenenfalls die Parameter.

   a) $x^2(x+1) = 0$ b) $x^2 + 2x + 1 = x^2$ c) $(x+1)(x-2) = 2x^2$

3.2 Spezialfälle von Gleichungen 2.Grades

Wir haben Spezialfälle von Gleichungen 2.Grades bereits angetroffen und dabei 2 Methoden kennengelernt, die zur Lösung geführt haben. Bei der ersten Methode haben wir die Gleichung faktorisiert, zum Beispiel:

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

Bei der zweiten Methode haben wir die Wurzel gezogen, zum Beispiel:

$$(x-2)^2-3=0$$

Übungen

10. Finde die Lösung(en) der folgenden Gleichungen 2.Grades in den reellen Zahlen.
    a) $9u^2-100=4u^2$ [$\mathbf{L}=\{\pm\sqrt{20}\}$] b) $(x-4)^2-144=0$ [$\mathbf{L}=\{-8,16\}$]
    c) $(x+1.5)(x-2)=0$ [$\mathbf{L}=\{-1.5,2\}$] d) $x^2-8x+4=4$ [$\mathbf{L}=\{0,8\}$]
    e) $(x+1)^2=0$ [$\mathbf{L}=\{-1\}$] f) $x^2-15x+64=8$ [$\mathbf{L}=\{7,8\}$]
    g) $(x-2)^2+3=0$ [$\mathbf{L}=\{\}$] h) $x^2+6x=-9$ [$\mathbf{L}=\{-3\}$]
    i) (Zusatz) $(11-z)^2+22z=125$ [$\mathbf{L}=\{\pm 2\}$]
11. Gib eine Gleichung mit den Lösungen 2 und -8 an. Wurzelgleichungen, die auf Gleichungen 2.Grades führen

3.3 Wir lösen eine Gleichung 2.Grades mit quadratischem Ergänzen

Bevor wir die allgemeine Lösungsmethode kennenlernen, lösen wir die folgenden **Vorübungen**:

a) Fülle die Lücken aus (Beispiel: $x^2-2x+1=(x-1)^2$).
   i) $x^2-8x+.....=(x\quad .....)^2$ ii) $x^2+12x+.....=(x\quad .....)^2$
   iii) $x^2-3x+.....=(x\quad .....)^2$ iv) $x^2+7x+.....=(x\quad .....)^2$

b) Fülle die Lücken aus (Beispiel: $x^2-10x=(x-5)^2-25$).
   i) $x^2-4x=(x\quad .....)^2-.....$ ii) $x^2+6x=(x\quad .....)^2-.....$
   iii) $x^2-x=(x\quad .....)^2-.....$ iv) $x^2+x=(x\quad .....)^2-.....$

Kommen wir nun zur allgemeinen Lösungsmethode. Wir betrachten die Gleichung:

$$x^2+6x+2=0$$

Problem: Weder die Methode des Faktorisierens noch die Methode des Wurzelziehens hilft uns hier weiter.

Wir brauchen eine neue Methode, diejenige des **quadratischen Ergänzens**. Die Idee dahinter: Wir versuchen, die Gleichung auf eine Form zu bringen, wie wir sie z.B. bei Aufgabe 5c) angetroffen haben. Dazu müssen wir den x^2- und x-Term in die Klammer $()^2$ „verpacken “.

Lösungsweg:

Übungen

a) Finde die Lösungen der folgenden Gleichungen ohne TR. Gib Dein Ergebnis in der Form **L** = {...} an. Überprüfe anschliessend bei (a) Deine Lösung.

i) $x^2+6x+7=0$ [$\mathbf{L}=\{-3\pm\sqrt{2}\}$] ii) $x^2+16x+3=0$ [$\mathbf{L}=\{-8\pm\sqrt{61}\}$]

iii) $2x^2+x-10=0$ [$\mathbf{L}=\{-2.5,2\}$] iv) $x^2+x+1=0$ [$\mathbf{L}=\{\}$]

3.4 Die Lösungsformel

Die Lösungsformel können wir jetzt mit quadratischem Ergänzen herleiten:

Übungen

a) Berechne die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel. Gib Deine Lösung(en) als Dezimalzahl in der Form **L** = {...} an.

i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ [$\mathbf{L} = \{0.5, 3\}$] ii) $4x^2 + 5x - 6 = 0$ [$\mathbf{L} = \{-2, 0.75\}$]

iii) $-2x^2 + x + 6 = 0$ [$\mathbf{L} = \{2, -1.5\}$] iv) $5x^2 + 8x = 4$ [$\mathbf{L} = \{-2, 0.4\}$]

b) Berechne die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel. Gib Deine Lösung(en) exakt (d.h. in Wurzelform, wobei die Wurzel so weit wie möglich zerlegt werden soll) in der Form **L** = {...} an.

i) $x^2 - 6x + 4 = 0$ [$\mathbf{L} = \{3 \pm \sqrt{5}\}$] ii) $-x^2 + 2x + 1 = 0$ [$\mathbf{L} = \{1 \pm \sqrt{2}\}$]

iii) $4x^2 - 4x - 7 = 0$ [$\mathbf{L} = \{0.5 \pm \sqrt{2}\}$] iv) $\sqrt{2}x^2 + x - \sqrt{2} = 0$ [$\mathbf{L} = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}/2\}$]

c) Berechne die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel. Gib Deine Lösung(en) in der Form **L** = {...} an.

i) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0$ [$\mathbf{L} = \{-1, 1/3\}$] ii) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = 0$ [$\mathbf{L} = \{1.5, 6\}$]

d) Die Gleichung $2x^2 + x - 1 = 0$ hat zwei Lösungen. Stelle eine Gleichung auf, deren Lösungen um 5 grösser sind und bringe das Ergebnis auf die Form $ax^2 + bx + c = 0$ wobei die Parameter a, b und c ganze Zahlen sein sollen. [$2x^2 - 19x + 44 = 0$]

3.5 Anzahl Lösungen einer Gleichung 2.Grades.

a) Wie viele Elemente hat die Lösungsmenge ?

i) $x^2 + 100x + 1 = 0$
ii) $2x^2 - x + 3 = 0$
iii) $4x^2 + 12x + 9 = 0$
iv) $16x^2 + 25x + 10 = 0$

[2,0,1,0]

b) Für welchen Wert des Parameters hat die Gleichung genau eine Lösung ?

i) $2x^2 - 3x + a = 0$
ii) $x^2 + bx + b + 3 = 0$
iii) $bx^2 + bx + 1 = 8x$

$[a = 1.125, b_1 = -2, b_2 = 6; b_1 = 4, b_2 = 16]$

c) Für welche Werte des Parameters hat die Gleichung $x^2 + 2x + 3a = 0$ genau 2 Lösungen? $[a < 1/3]$

3.6 Biquadratische Gleichungen

Definition 4 *Eine Gleichung heisst biquadratisch, wenn sie durch Äquivalenzumformungen auf folgende Form gebracht werden kann:*

Beispiele

- $x^4 + x^2 + 1 = 0$
- $3x^4 + 2x^2 + 1 = 0$

Frage: Wie ermittle ich die Lösungsmenge einer biquadratischen Gleichung ?

Beispiel

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Übungen

a) Löse die folgenden Gleichungen mit Hilfe einer geeigneten Substitution (ersetzen). Gib Dein Ergebnis in der Form **L** = {...} an.

i) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ [$\mathbf{L} = \{\pm\sqrt{2}, \pm 3\}$] ii) $x^4 + 8 = 9x^2$ [$\mathbf{L} = \{\pm 2\sqrt{2}, \pm 1\}$]

b) Löse die folgenden Gleichungen mit Hilfe einer geeigneten Substitution. Gib Dein Ergebnis in der Form **L** = {...} an.

i) $x^6 + 61x^3 - 8000 = 0$ [$\mathbf{L} = \{-5, 4\}$] ii) $x^8 + 17x^4 + 16 = 0$ [$\mathbf{L} = \{\}$]

c) Löse die folgenden Gleichungen mit Hilfe einer geeigneten Substitution (Term ersetzen durch einen einfacheren Term). Gib Dein Ergebnis in der Form **L** = {...} an.

i) $(x-10)^2 - 8(x-10) + 15 = 0$ [$\mathbf{L} = \{13, 15\}$] ii) $(x+4)^2 - 12(x+4) + 34 = 0$ [$\mathbf{L} = \{2 \pm \sqrt{2}\}$]

3.7 Textaufgaben, die auf Gleichungen 2.Grades führen.

a) Von zwei reellen Zahlen ist eine um 50 grösser als die andere und das Produkt um 50 grösser als die Summe. Bestimme die beiden Zahlen. [2 und 52 oder -50 und 0]

b) Das Produkt der beiden kleinsten von sechs aufeinander folgenden ganzen Zahlen ist dreimal so gross wie die Summe der vier übrigen Zahlen. Berechne die kleinste Zahl. [-3 oder 14]

c) Welche Zahlen unterscheiden sich um 0.24 von ihrer Quadratzahl (z.B. ist die Quadratzahl von 4 die Zahl 16) ? [-0.2,0.4,0.6,1.2]

d) Eine Schulklasse fährt mit einem Autocar ins Skilager. Die Fahrtkosten von 300 Franken werden gleichmässig unter den Teilnehmern aufgeteilt. Da ein Schüler krankheitshalber nicht mitfahren kann, ist der Kostenanteil für die übrigen Teilnehmer um 50 Rappen grösser. Wie viele sind mitgefahren ? [24]

e) Ein Blumenbeet von 3 m Länge und 2 m Breite ist ringsum mit konstanter Breite von Rasen eingefasst, sodass Einfassung und Beet gleichen Flächeninhalt haben. Wie breit ist die Einfassung ? [5 dm]

f) Der Umfang eines Rechtecks misst 25 m, der Flächeninhalt 25 m^2. Berechne die Seiten. [10 m und 2.5 m]

g) Jemand verkauft eine Uhr für Fr. 144.- und gewinnt dabei so viele Prozente, wie die Uhr Franken gekostet hat beim Ankauf. Wie viele Prozente sind es ? [80%]

4 Wurzelgleichungen, die auf Gleichungen 2.Grades führen

a) Finde die Lösungsmenge in **R**. Gib Dein Ergebnis in der Form **L** = {...} an.

i) $\sqrt{x+1} = x-1$ [$\mathbf{L} = \{3\}$] ii) $\sqrt{x+1} + x = 5$ [$\mathbf{L} = \{3\}$]

iii) $\sqrt{x+2}\sqrt{x+7} = 6$ [$\mathbf{L} = \{2\}$] iv) $\sqrt{x-1}\sqrt{x+6} = 12$ [$\mathbf{L} = \{10\}$]

v) $\sqrt{x+20} = \sqrt{x} + \sqrt{x-12}$ [$\mathbf{L} = \{16\}$] vi) $\sqrt{13x+12} = 2\sqrt{x-3} + 3\sqrt{x}$ [$\mathbf{L} = \{4\}$]

vii) $\sqrt{4x-9} + \sqrt{6x-7} = \sqrt{5x-3} + \sqrt{5x-13}$ [$\mathbf{L} = \{4\}$]

b) In einem Koordinatensystem sind die Punkte $A(-1|0)$ und $B(7|0)$ gegeben. Bestimme die Lage des Punktes $P(0|y)$ auf der positiven y-Achse so, dass die Summe seiner Abstände von A und B gleich 10 ist. [$P = (0|2.4)$]