

2.2 Funktionen 1.Grades

(Thema aus dem Bereich Analysis)

Inhaltsverzeichnis

1	Was ist eine Funktion 1.Grades ?	2
2	Die Steigung einer Geraden	4
2.1	Die Definition der Steigung	4
2.2	Die Berechnung der Steigung aus zwei gegebenen Punkten.	5
3	Wie können vorgegebene Punkte verwendet werden ?	7
4	Die Berechnung des Schnittpunktes von zwei Geraden	7
5	Textaufgaben	9

1 Was ist eine Funktion 1.Grades ?

Unter Funktionen 1.Grades verstehen wir Funktionen, in deren Vorschrift nur ein x (kein $x^2, x^3, \sqrt{x}, \dots$) vorkommt.

Beispiele

- $f(x) = 2x - 4$
- $f(x) = -6x - 2$
- $f(x) = 0.5x + 1$
- $f(x) = x + 24$

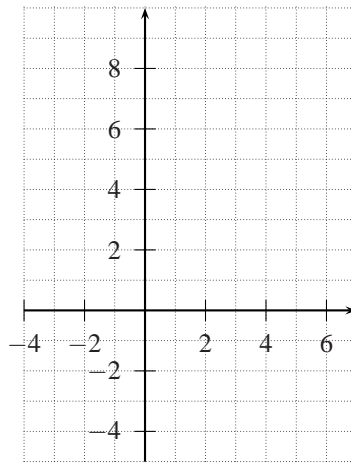
Die allgemeine Definition:

Definition 1

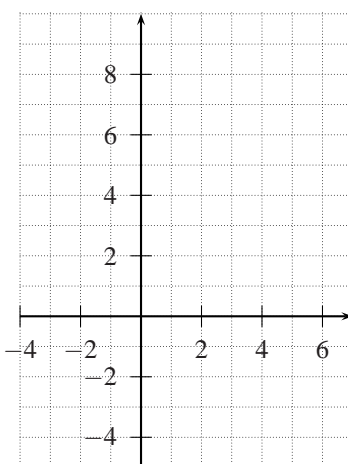
Eine Funktion f heisst **Funktion 1.Grades**, wenn ihre Vorschrift folgende Form hat:

Übung

1. Gib ein Beispiel einer Funktion an, die nicht den Grad 1 hat.
2. Die Punkte $A = (-6|?)$, $B = (?|-6)$, $C = (0|?)$ und $D = (?|0)$ liegen auf dem Graphen der Funktion $y = 3x + 2$. Berechne die fehlenden Koordinaten dieser Punkte.
[$A = (-6|-16)$, $B = (-8/3|-6)$, $C = (0|2)$, $D = (-2/3|0)$]
3. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen ins untenstehende Koordinatensystem
 - a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x + 1$
 - b) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -x + 2$
 - c) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 1.5x - 3$
 - d) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = -0.5x + 3$
 - e) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 2x + 3$



4. Fülle die Lücke aus mit steiler/flacher.
- a) Wenn m (die Zahl vor dem x) positiv ist, dann gilt: je grösser m , umso die Gerade.
- b) Wenn m (die Zahl vor dem x) negativ ist, dann gilt: je grösser m , umso die Gerade.
5. Welchen Einfluss hat die Zahl n (die Zahl ohne x) auf den Graphen ?
6. Prüfe folgende Aussage: Wenn sich n ändert, dann auch die Steigung der Geraden (A6 ist hilfreich).
7. Gegeben ist die Vorschrift $y = 2x + 1$. Berechne den Schnittpunkt des Graphen mit der x -Achse und mit der y -Achse. [(-0.5|0), (0|1)]



8. Fülle folgende Wertetabelle aus:

x	-2	-1	0	1	2	3
$y=2x-1$						

Was fällt Dir auf ?

9. Ein Apfelverkäufer hat bei seinem Arbeitsbeginn 20Fr. in der Kasse. Für 1 kg Äpfel verlangt er 3Fr.. Kann die Zuordnung „Anz. kg verkaufter Äpfel \rightarrow Kassenbestand“ mit einer Funktion ersten Grades beschrieben werden ? Begründe Deine Entscheidung !

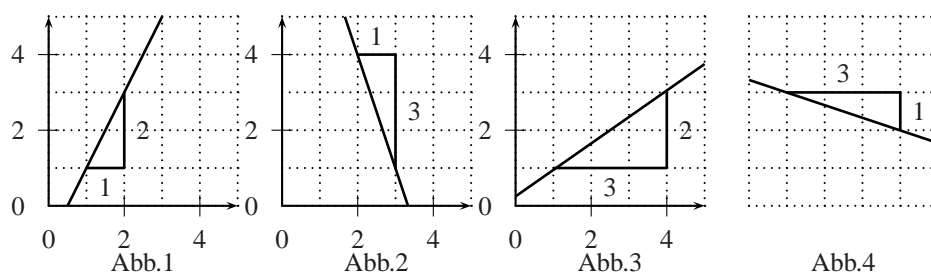
2 Die Steigung einer Geraden

2.1 Die Definition der Steigung

Wir bezeichnen die Steigung einer Geraden mit s . Am naheliegendsten wäre es, einfach den Steigungswinkel zu nehmen. Mit dem lässt sich aber nicht einfach rechnen. Darum wählen wir einen anderen Weg, um die Steigung anzugeben:

- Wir wählen zwei Punkte auf dem Graphen.
- Wir zeichnen das Steigungsdreieck ein.
- Wir dividieren die Höhe mit der Länge, den Quotienten nennen wir **Steigung s**.

Beispiele



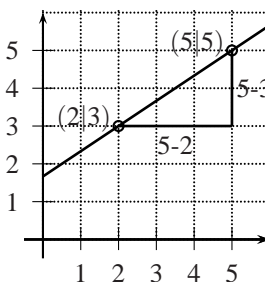
Die Steigungen werden nun folgendermassen bestimmt:

- Abb.1: $s = 2/1 = 2$.
- Abb.2: $s = -3/1 = -3$.
- Abb.3: $s = 2/3$.
- Abb.4: $s = -1/3$.

2.2 Die Berechnung der Steigung aus zwei gegebenen Punkten.

Gegeben sind die zwei Punkte $P_1 = (2|3)$ und $P_2 = (5|5)$. Welche Steigung hat die Gerade, die durch diese beiden Punkte geht ?

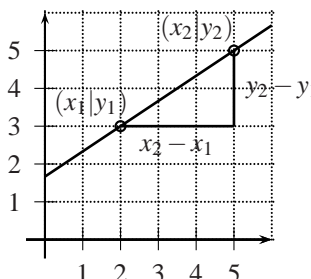
- Auf der nebenstehenden Abbildung sehen wir das Steigungsdreieck.
- Wir können die Höhe des Dreiecks berechnen: $5-3=2$.
- Wir können die Länge des Dreiecks berechnen: $5-2=3$.
- Die Steigung beträgt somit: $s = \frac{2}{3}$.



Nun der allgemeine Fall:

Gegeben sind die zwei Punkte $P_1 = (x_1|y_1)$ und $P_2 = (x_2|y_2)$, wobei gilt $x_2 > x_1$. Welche Steigung hat die Gerade, die durch diese beiden Punkte geht ?

- Auf der nebenstehenden Abbildung sehen wir das Steigungsdreieck.
- Wir können die Höhe des Dreiecks berechnen: $y_2 - y_1$.
- Wir können die Länge des Dreiecks berechnen: $x_2 - x_1$.

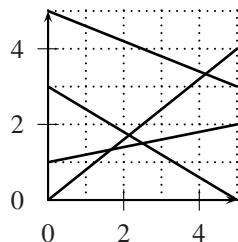


• Die Steigung beträgt somit: $s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Übungen

10. Zeichne eine beliebige Gerade mit der Steigung 3 !
11. Bestimme jeweils die Steigung der Geraden.

[0.8; 0.2; -0.6; -0.4]



12. Wir gehen noch einmal zurück zur Aufgabe 11.
- Berechne jeweils die Steigung der vier Geraden.
 - Hat die Steigung einer Geraden etwas mit der dazugehörigen Funktionsvorschrift zu tun ?
13. Gegeben sind die drei Punkte $P_1 = (2|23.6)$, $P_2 = (10|50)$ und $P_3 = (50|182)$. Diese Punkte können wir nur schwer in ein Koordinatensystem eintragen ! Gibt es einen anderen Weg, um herauszufinden, ob alle drei Punkte auf einer Geraden liegen ?
14. Fülle die erste Lücke mit dem Wort links/rechts, die zweite Lücke mit dem Wort positiv/negativ aus.
- $A(3|2), B(6|8)$. A liegt von B, die Steigung ist
 - $A(3|2), B(4|1)$. A liegt von B, die Steigung ist
 - $A(-3|2), B(-4|1)$. A liegt von B, die Steigung ist
 - $A(-3|-2), B(-4|1)$. A liegt von B, die Steigung ist
15. Eine Gerade geht durch die Punkte A und B. Berechne die Steigung s der Gerade, wenn
- $A(2|3), B(4|7)$ [s = 2]
 - $A(1|4), B(2|1)$ [s = -3]
 - $A(-1|-3), B(-3|-4)$ [s = 0.5]
16. Zeichne eine beliebige Gerade und gib die dazugehörige Funktionsvorschrift mit Hilfe der Zeichnung an.

17. Welchen Winkel schliesst der Graph der folgenden Funktionen mit der x -Achse ein ?
- a) $y = 3x + 1$ [71.57°] b) $y = -2x - 4$ [-63.43°]
18. Welche beiden Winkel schliessen die Graphen der folgenden Funktionen ein ?
- a) $f(x) = x + 1, g(x) = 4x + 1$ [30.96°, 149.04°] b) $f(x) = x + 2, g(x) = 4x + 5$ [30.96°, 149.04°]
c) $f(x) = -x + 1, g(x) = 4x + 1$ [120.96°, 59.04°]

3 Wie können vorgegebene Punkte verwendet werden ?

Bei manchen Aufgaben sind Punkte gegeben, die auf der Geraden liegen. Wie können solche Punkte verwendet werden ? Wir betrachten dazu eine Aufgabe.

Eine Beispielaufgabe

Die Gerade g geht durch die zwei Punkte $P_1 = (-3|-4)$ und $P_2 = (2|5)$. Berechne die Funktionsvorschrift f , die genau diesen Graphen als Funktionsgraphen hat !

$$[f(x) = 1.8x + 1.4]$$

Lösung

- Es handelt sich um eine Gerade, also können wir sicher schreiben:

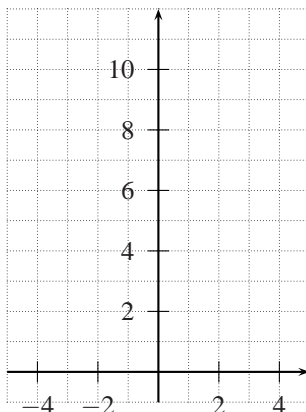
19. Die zu $y = \frac{2}{3}x + n$ gehörende Gerade geht durch den Punkt $(-6|0)$. Berechne n . [n = 4]
20. Für die Funktion 1.Grades $y = mx + 4$ gilt: Der Punkt $(5|9)$ liegt auf ihrem Graph. Berechne m . [m = 1]
21. Auf einer Gerade g liegen die Punkte $(1|-1)$ und $(3|3)$. Wie lautet die dazugehörige Funktionsvorschrift für die Gerade ? [y = 2x - 3]

4 Die Berechnung des Schnittpunktes von zwei Geraden

Eine Beispielaufgabe

Gegeben sind zwei Funktionen $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, y = x + 2$ und $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, y = -x + 5$. Die Funktionsgraphen von f und g haben genau einen Schnittpunkt S . Finde ihn! [(1.5|3.5)]

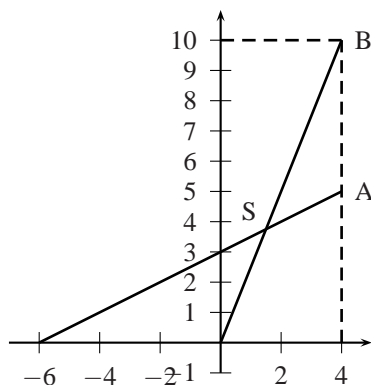
- Wir wollen zuerst die Situationen veranschaulichen und zeichnen die beiden Geraden ins untenstehende Koordinatensystem.



- Für den Schnittpunkt gilt:

Übungen

22. Gegeben sind die zwei linearen Funktionen $y = 3x + 5$ und $y = 2x - 4$. Berechne den Schnittpunkt. [(-9| -22)]
23. Die Gerade g_1 geht durch die Punkte $P_1 = (1 | 1)$ und $P_2 = (3 | 5)$. Die Gerade g_2 geht durch die Punkte $P_1 = (0 | 5)$ und $P_2 = (4 | 1)$. Berechne den Schnittpunkt der beiden Geraden und prüfe nachher zeichnerisch nach. [(2|3)]
24. Berechne die Dreiecksfläche, die von der y -Achse und den Geraden g und h eingeschlossen wird, wenn die dazugehörigen Vorschriften $y = \frac{1}{3}x + 2$ und $y = -x + 8$ lauten (die Skalierung der x - und y -Achse ist gleich, $1E = 1\text{ cm}$). [13.5 cm²]
25. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABS (die Skalierung der x - und y -Achse ist gleich, $1E = 1\text{ cm}$). [6.25 cm²]



26. (Zusatz) Gegeben sind die zwei Funktionen 1.Grades $y = m_1x + n_1$ und $y = m_2x + n_2$. Leite eine Formel für den Schnittpunkt her !

$$\left[\left(\frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2} \mid \frac{m_1 n_2 - n_1 m_2}{m_1 - m_2} \right) \right]$$

5 Textaufgaben

Beispiel

Eine 80cm hohe zylinderförmige Regentonne wird bei gleichmäßigem Zulauf mit Wasser gefüllt. Nach 3 Minuten steht das Wasser 25cm hoch, nach weiteren 2 Minuten steht es 33cm hoch. Wie lange dauert es, bis die Tonne voll ist ?

[16.75min]

Übungen

27. -17.8 Grad Celsius entsprechen 0 Grad Fahrenheit und 37.8 Grad Celsius entsprechen 100 Grad Fahrenheit. Wir ordnen x Grad Celsius y Grad Fahrenheit zu.

- a) Diese Zuordnung können wir mit einer linearen Funktionsvorschrift beschreiben. Finde diese Vorschrift. $[y = 1.80x + 32.04]$
- b) Wieviel Grad Fahrenheit entsprechen 100 Grad Celsius ? Wieviel Grad Celsius entsprechen 70 Grad Fahrenheit ? $[100^{\circ}C \hat{=} 212.04^{\circ}F, 70^{\circ}F \hat{=} 21.09^{\circ}C]$
- c) Bei wieviel Grad Fahrenheit liegt der Gefrierpunkt von Wasser (0° Celsius)? $[32.04^{\circ}F]$
- d) (Zusatz) Ermittle eine zweite Funktionsvorschrift, die den Grad Fahrenheit die Grad Celsius zuordnet. $[y = 0.56x - 17.8]$
28. Eine Schraubenfeder in in unbelastetem Zustand 8cm, bei einer Belastung mit 5N 11 cm lang. Die Zuordnung Kraft $x \mapsto$ Dehnung y ist dabei linear.
- a) Berechne die Zuordnungsvorschrift. $[f(x) = 0.6x + 8]$
- b) Berechne die Federlänge für 4N. $[10.4\text{cm}]$
29. Bei einer Prüfung können maximal 21 Punkte geschrieben werden. Der Lehrer gibt für 20 Punkte die Note 6, für 0 Punkte die Note 1. Die Zuordnung „erzielte Punkte \rightarrow Note“ soll dabei linear sein.
- a) Mit welcher Funktionsvorschrift lässt sich diese Zuordnung beschreiben ?
- b) Welche Note erhält der Schüler, wenn er 9 Punkte erzielt ?
- c) Wieviele Punkte sind nötig, um die Note 4 zu erzielen ?
30. Die Bewegung eines Körpers mit konstanter Geschwindigkeit (der Zeit in Sekunden wir der Weg in Metern zugeordnet) lässt sich mit der Funktionsvorschrift $y = 5 + 3t$ beschreiben.
- a) Welche Strecke hat der Körper zum Zeitpunkt $t = 4$ zurückgelegt ?
- b) Nach welcher Zeit hat der Körper 30m zurückgelegt ?
31. Ein Radfahrer fährt zur Zeit $t = 0$ mit einer konstanten Geschwindigkeit von 18km/h los. Ein Mofafahrer fährt 10min später mit einer konstanten Geschwindigkeit von 24km/h los. Nach welcher Zeitdauer (aus der Sicht des Velofahrers) treffen sie sich ? $[40\text{ min}]$
32. (Zusatz) Gegeben sind die zwei Funktionen 1.Grades $f(x) = m_1x + n_1$ und $g(x) = m_2x + n_2$. Leite eine Formel für den Schnittwinkel her ! $[|\tan^{-1}(m_1) - \tan^{-1}(m_2)|]$