1.8 Mengenlehre-Einführung in die reellen Zahlen

Inhaltsverzeichnis

1 Repetition

Die Menge der **natürlichen Zahlen** kennen wir von der Primarschule her:

Die Menge der **ganzen Zahlen** besteht aus den natürlichen Zahlen, der Null und den natürlichen Zahlen mit dem Vorzeichen -:

Die Menge der rationalen Zahlen ist die („Menge aller Brüche “).

Die natürlichen und die ganzen Zahlen sind in den rationalen Zahlen enthalten, z.B. $3 = \frac{3}{1}$ und $-3 = \frac{-3}{1}$
Diese Zahlenmengen können wir auch graphisch darstellen:

Wir kommen nun zur zentralen Frage dieses Skriptes:

Frage: Wenn wir alle Brüche auf der Zahlenachse markieren (z.B. mit einem Kreuz), bleiben dann noch Lücken auf dem Strahl übrig ?

Lösen wir dazu folgende Aufgabe:

Übung

1. Gib eine rationale Zahl an, die zwischen den zwei gegebenen Zahlen liegt.

a) $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{20}$ und $\frac{1}{21}$

Die Übung zeigt uns, dass für zwei beliebige rationale Zahlen q_1 und q_2 immer eine rationale Zahl q_3 gefunden werden kann, die dazwischen liegt. Dies ist ein Hinweis dafür, dass keine Lücken übrigbleiben.

Wir gehen der Frage weiter nach und lösen die folgende Übung:

2. Stelle die folgenden Zahlen als Dezimalzahlen (z.B. $0.345, 0.\overline{4}$) dar (schriftliche Division).

   a) 33:5 = b) 56:9 = c) 1:7 =

3. Ergänze den folgenden Satz mit Hilfe der vorherigen Aufgabe: Die Dezimalzahl (oder Dezimalzahldarstellung) eines Bruches ist

   entweder .... oder ....

4. Gibt es neben abbrechenden und periodischen Dezimalzahlen noch weitere ? Kannst Du eine solche Zahl angeben/konstruieren ?

5. Überlegen wir uns noch einmal: bleiben Lücken auf dem Zahlenstrahl übrig, wenn wir alle Brüche einzeichnen ?

2 irrationale und reelle Zahlen

Die Dezimalzahlen der dritten Sorte haben einen speziellen Namen:

Definition 1 *Eine Dezimalzahl, die weder abbrechend noch periodisch ist, nennen wir .... Zahl.*

Wir definieren nun eine neue Menge, die Menge der reellen Zahlen:

Definition 2 *Die Menge der reellen Zahlen* ***R*** *ist die Vereinigung der Menge der ....*

Zahlen und die Vereinigung der Menge der .... Zahlen .

Mit Mengendiagrammen können wir die reellen Zahlen folgendermassen darstellen:

Übungen

6. Überprüfe, ob die folgenden Aussagen wahr sind !
   a) -2,5 ist eine ganze Zahl
   b) -1 ist eine natürliche Zahl
   c) $0{,}2\overline{56}$ ist eine rationale Zahl
   d) $2{,}23\overline{3}$ ist eine irrationale Zahl
   e) $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl
7. Sind die folgenden Zahlen rational oder irrational (Die Stellen nach dem Komma gehen mit dem gleichen Schema weiter) ?
   a) 3,245246244
   b) 0,123124123124.....
   c) 3,213214215216..... (nach der 9 kommt die 0)
   d) 4,10100100010000100000.....
8. Erfinde zwei irrationale Zahlen.

3 weitere irrationale Zahlen

Irrationalen Zahlen sind wir schon früher begegnet, einerseits bei der Kreisberechnung, andererseits beim Wurzelziehen.
Ein paar Beispiele:

- $\sqrt{2}$ ist irrational.
- $\sqrt{3}$ ist irrational.
- $\sqrt{5}$ ist irrational.
- Die Wurzel einer natürlichen Zahl, die keine Quadratzahl ist, ist irrational (Quadratzahlen: 1,4,9,...).

Euklid (365 v.Chr.) hat bereits in der Antike bewiesen, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. Der Beweis wird an der Prüfung nicht verlangt, für Interessierte ist er aufgeführt.

Bei der Kreisberechung sind wir der Zahl π begegnet, die ebenfalls irrational ist. Der Nachweis der Irrationalität ist allerdings viel schwieriger zu erbringen.

3.1 Zusatz: Der Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist

Wenn wir $\sqrt{2}$ in den Taschenrechner eintippen erhalten wir das Ergebnis: 1,41421356... Sie scheint unendlich viele Stellen zu haben, dazu scheint keine Periodizität vorhanden zu sein. Wir können aber nicht sicher sein. Vielleicht hat die Zahl 100 Mio Stellen und bricht danach ab. Vielleicht wiederholt sie sich immer nach 10000 Stellen. Den Beweis, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, hat Euklid gefunden:

- Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei p und q teilerfremd sind
- Quadrieren: $2 = \frac{p^2}{q^2}$
- Mit q^2 multiplizieren: $2q^2 = p^2 \Longrightarrow p^2$ ist eine gerade Zahl $\Longrightarrow p$ ist eine gerade Zahl.
- Weil p gerade ist, kann man schreiben: $p = 2r$
- Aus Schritt 3 wissen wir: $2q^2 = p^2 \Longrightarrow 2q^2 = (2r)^2 = 4r^2 \Longrightarrow$ (durch 2 teilen) $q^2 = 2r^2 \Longrightarrow q^2$ ist gerade $\Longrightarrow q$ ist gerade.
- Beim ersten Schritt haben wir geschrieben: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei p, q teilerfremd sind. Wir haben aber herausgefunden, dass p und q gerade sind, also nicht teilerfremd sein können. Wir haben nun einen Widerspruch. Die Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational ist, ist falsch. Damit folgt, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

Zur Beweismethode:

Die Beweismethode ist unter dem Namen **Widerspruchsbeweis** bekannt. Wir gehen davon aus, dass nur zwei Fälle in Frage kommen (rational oder nicht rational). Können wir einen Fall ausschliessen, dann muss es der andere Fall sein.

Bei unserem Beweis gibt es zwei Möglichkeiten: 1. $\sqrt{2}$ ist rational oder 2. $\sqrt{2}$ ist irrational. Wir haben angenommen, dass $\sqrt{2}$ rational ist und danach herausgefunden, dass dies nicht sein kann. Es bleibt nur noch Möglichkeit 2, nämlich dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

Übungen

9. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 = 2$

   a) in **Q**. b) in **R**.

10. Kann das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises (U:d) exakt mit einer Dezimalzahl angegeben werden ?

11. (Zusatz) Beweise analog zur obigen Methode, dass die Zahl $\sqrt{3}$ irrational ist.