1.6 Bruchterme

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Repetition

Den Begriff **Term** haben wir bereits kennengelernt. Ein Term ist zusammengesetzt aus Zahlen, Variabeln, Klammern und Bruchstrichen. Dabei sind insbesondere Gleichungen und Ungleichungen keine Terme.

Der Begriff Bruchterm ist selbsterklärend. Damit sind diejenigen Terme gemeint, die einen (oder mehrere) Bruchstrich(e) haben.

Beispiele

Bei Bruchtermen gelten die gleichen Prinzipien wie bei den Brüchen (z.B. $\frac{1}{3}$). Deshalb lösen wir als Repetition schnell ein paar Übungen mit bereits bekanntem Stoff.

Repetitionsübungen

1. Berechne die folgenden Ausdrücke !

   a) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$ b) $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=$

   c) $\frac{4}{5}-\frac{1}{3}=$ d) $\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=$

2. Berechne die folgenden Ausdrücke !

   a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=$ b) $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=$

   c) $\frac{3}{5}:\frac{1}{2}=$ d) $\frac{2}{5}:\frac{1}{4}=$

3. Fülle jeweils die Lücke aus:

   a) Brüche können nur addiert/subtrahiert werden, wenn sie ....

   b) Brüche mit gleichem Nenner werden addiert, indem man ....

   c) Brüche werden multipliziert, indem man ....

   d) Brüche werden dividiert, indem man ....

4. Entscheide, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

   a) Zwei Brüche können nur miteinander multipliziert werden, wenn der Nenner gleich ist.

   b) Wenn zwei Brüche den gleichen Zähler haben, können sie miteinander subtrahiert werden.

2 Multiplikation und Division von Bruchtermen

Beispiele

5. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

   a) $\frac{14ab}{5a^2-5b^2}\cdot\frac{10a+10b}{7ab^3}$ $[\frac{4}{b^2(a-b)}]$
   b) $\frac{12-24y}{16x+40}\cdot\frac{4x+10}{4y^2-1}$ $[-\frac{3}{2y+1}]$
   c) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{2a+2b}{3b-3a}$ $[-\frac{2}{3}]$
   d) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^3+xy^2}{(x-y)^2}$ $[\frac{x(x+y)}{x-y}]$
   e) $\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{x-y}{x^2+xy}$ $[\frac{x^2+y^2}{x}]$

6. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

   a) $\frac{2x^2+4xy+2y^2}{(3xy)^2}:\frac{x^2-y^2}{9x^2y}$ $[\frac{2(x+y)}{y(x-y)}]$
   b) $\frac{16u^2-9b^2}{24(b+u)}:\frac{4u-3b}{36(u+b)}$ $[\frac{3(4u+3b)}{2}]$
   c) $\frac{9z^2+12w}{12z-20}:\frac{9z^4-16w^2}{18z-30}$ $[\frac{9}{2(3z^2-4w)}]$
   d) $\frac{c^2-d^2}{c^2-4c+3}:\frac{(d-c)^2}{c-3}$ $[-\frac{c+d}{(c-1)(d-c)}]$

7. Erfinde eine Aufgabe zum Thema „Division von Brüchen“, die das Ergebnis $\frac{1}{a}$ hat.

3 Die Addition von zwei Bruchtermen-Methode I

Wir wollen folgende Aufgabe lösen:

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a-b}=$$

Wir lösen die Aufgabe in zwei Schritten:

-
-

Die Ausführung:

Übungen

8. Mache bei den folgenden Aufgaben die Brüche gleichnamig.

   a) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}$ b) $\dfrac{7}{t-1}+\dfrac{6}{1-t}$

9. Fülle die Lücke aus: Den gemeinsamen Nenner von zwei Brüchen finden wir heraus, indem wir ....

10. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

    a) $\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}$ [$\frac{4ab}{(a+b)(a-b)}$] b) $\dfrac{7}{t-1}+\dfrac{6}{1-t}$ [$\frac{1}{t-1}$]

    c) $x-\dfrac{x^2-2}{x-2}$ [$-\frac{2(x-1)}{x-2}$] d) $\dfrac{k-l}{4k+4l}+\dfrac{k+4l}{6k+6l}$ [$\frac{5}{12}$]

11. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

    a) $\left(\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}\right):\left(\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}\right)$ [$-b-a$] b) $\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right):\left(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}\right)$ [$\frac{n+m}{n-m}$]

12. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

    a) $\dfrac{a^2+ab}{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}\right)$ [$\frac{a}{a-b}$] b) $\left(a-\dfrac{a}{a+1}\right)\left(1-\dfrac{1}{a^2}\right)$ [$a-1$]

c) $\dfrac{45a}{a^2-b^2} : \left(\dfrac{7a}{a+b} + \dfrac{a}{2a+2b}\right)$ $[\frac{6}{a-b}]$

d) $\left(\dfrac{2t+4s}{3t-5s} - \dfrac{2t-4s}{3t+5s}\right) : \dfrac{t^2-4s^2}{9t^2-25s^2}$ $[\frac{44st}{(t+2s)(t-2s)}]$

4 Doppelbrüche

Doppelbrüche mit Zahlen haben wir bereits in der Unterstufe kennengelernt. Bei Doppelbrüchen haben die verschiedenen Bruchstriche verschiedene Prioritäten. Damit der Doppelbruch eindeutig ist, muss der **Hauptbruchstrich** gekennzeichnet sein, meistens ist er die längste Linie, in diesem Skript ist er die **dickste Linie**

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}} =$$

Merke: Bei Doppelbrüchen werden die äusseren und die inneren Glieder miteinander multipliziert.

Aufgabe: Forme den folgenden Bruch zu einem Bruch mit einem Bruchstrich um.

$$\frac{\dfrac{2a+4}{a^2}}{\dfrac{3a+6}{2a^3}}$$

Wenn wir wissen, wie wir einen Doppelbruch mit Zahlen lösen müssen, dann können wir auch ohne Probleme einen Doppelbruch mit Variabeln lösen:

Bei der nächsten Aufgabe kommt eine zusätzliche Schwierigkeit dazu. Bis jetzt hatten wir oberhalb des Hauptbruchstriches (dicker Bruchstrich) und unterhalb des Bruchstriches schöne Brüche. In der folgenden Situation ist das nicht mehr so. Oberhalb des Bruchstriches haben wir eine **Summe** von Brüchen. Die Aufgabe sieht so aus:

$$\frac{\dfrac{5}{x+a}-\dfrac{7}{x-a}}{\dfrac{2}{x^2-a^2}}$$

Die Lösung ist nicht viel schwieriger als beim vorherigen Beispiel. Wir müssen einfach zuerst die beiden Brüche zusammenzählen, danach befinden wir uns in der bekannten Situation des oberen Beispiels.

Lösung

Übungen

13. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

a) $\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$ $[\frac{1}{x-y}]$ b) $\dfrac{\frac{a}{a^2-1}}{\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}}$ $[-\frac{a}{2}]$

14. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

a) $\dfrac{\frac{4a-8b}{a^2-4b^2}}{5}$ $[\frac{4}{5(a+2b)}]$ b) $\dfrac{x^2+a^2}{\frac{a}{a-x}-\frac{x}{a+x}}$ $[a^2-x^2]$ c) $\dfrac{a}{1+\frac{1}{a+1}}$ $[\frac{a(a+1)}{a+2}]$

15. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

a) $$\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$$ $[\frac{x}{x+1}]$

b) $$\frac{\frac{2a}{a-3}-\frac{a}{a+4}}{\frac{a+11}{a^2+a-12}}$$ $[a]$

c) $$\frac{\frac{r+s}{r-s}-\frac{r-s}{r+s}}{1-\frac{r^2+s^2}{r^2-s^2}}$$ $[-\frac{2r}{s}]$

d) $$\frac{\frac{a}{c}-\frac{a+ab}{a+c}}{6a^2-12abc+6b^2c^2}$$ $[\frac{a}{6c(a+c)(a-bc)}]$

16. Versuche die Aufgabe des nächsten Abschnitts mit der Multiplikationsmethode zu lösen.

5 Die Addition von zwei Bruchtermen mit komplizierterem Nenner

Wir betrachten nun eine Aufgabe mit komplizierteren Nennern.

$$\frac{1}{x^2+x}-\frac{x}{x+1}=$$

6 Die Addition von zwei Bruchtermen - Methode II

Das Beispiel des vorherigen Abschnittes hat uns gezeigt, dass die Multiplikationsmethode nicht immer zum Ziel führt. Wir erhalten Terme wie x^3,... mit denen wir mit unserem Wissen nichts anfangen können. Wir erhalten zwar nichts Falsches, geraten aber in eine Sackgasse. Deshalb müssen wir uns etwas neues überlegen.

6.1 Das kgV

Bei dieser Methode geht es um das kleinste gemeinsame Vielfache. Dieses ist folgendermassen definiert:

Definition 1 *Gegeben sind die Zahlen $a, b \in \mathbf{N}$. Die kleinste natürliche Zahl, von der a und b Teiler sind, nennen wir kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b, abgekürzt kgV(a, b).*

Beispiel:

- kgV(3,5) =
- kgV(4,6) =

Bei grösseren Zahlen können wir das kgV bekanntlich mit Hilfe der Primzahlzerlegung bestimmen (wenn es ohne TR geschehen soll). Wir betrachten dieses Verfahren hier, weil wir dieses Prinzip nachher auch auf Terme mit Variabeln übertragen können.

Das kgV(24,54) bestimmen:

Die Anwendung auf das Bruchrechnen:

$$\frac{5}{24} + \frac{7}{54} = ?$$

Frage: Wie können wir das kgV allgemein bei Termen bestimmen ? **Antwort:**

Beispiele:

- Bestimme das kgV der Terme a, b, a^2, b^3 und c^2.

- Bestimme das kgV der Terme $2x^2, 3y$ und $4x$.

- Bestimme das kgV der Terme $(x+1)(x+2), (x+1)^2(x+2)$ und $(x+1)(x+3)^2$.

- Bestimme das kgV der Terme $3x(x+1)(x+2), 2x^2y(x+1)^2(x+2)$ und $6y^2(x+1)(x+3)^2$.

- Bestimme das kgV der Terme $x+y, x-y$ und $x+y+z$

6.2 Lösung der Aufgabe mit dem kgV

Lösen wir die Aufgabe aus Abschnitt 1.4 nun mit der Methode des kgV:

$$\frac{1}{x^2+x} - \frac{x}{x+1}$$

Diese Methode funktioniert natürlich auch für Aufgaben mit mehr als zwei Bruchtermen.

Übungen

17. Bestimme das kgV der folgenden Terme:
    a) x, y, z^2, x^2 und z^3
    b) $3x, 4z^2, 5y^2$ und $2y^3$
    c) $(x+1), (x+2)^2$ und $(x+1)^2(x+2)$
    d) $3(x+3)(x+5), 2(x+2)(x+5)^2$ und $4(x+3)^2(x+4)$
    e) $a+b, a-b$ und $a+b+c$

18. Bestimme das kgV der folgenden Terme, indem Du zuerst faktorisierst:
    a) s^2-4 und $2-s$
    b) $u-v, v-u$ und $u+v$
    c) z^2-z, z^2 und z^2+z

19. Mache die Brüche gleichnamig. Dabei sollte der Nenner so klein (im Sinne des kgV) wie möglich sein.
    a) $\dfrac{s+7}{3s-6}-\dfrac{s+4}{s^2-2s}$
    b) $\dfrac{u}{uv+v^2}-\dfrac{v}{u^2+uv}$
    c) $\dfrac{1}{z^2-z}-\dfrac{2}{z^2}+\dfrac{1}{z^2+z}$
    d) $\dfrac{2x-1}{x-3}-\dfrac{2x(x+2)}{x^2-9}-\dfrac{2}{3x}$

20. Beachte, dass die Aufgaben zum Teil oben schon vorgekommen sind. Fasse nun so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.
    a) $\dfrac{s+7}{3s-6}-\dfrac{s+4}{s^2-2s}$ [$\frac{s+6}{3s}$]
    b) $\dfrac{u}{uv+v^2}-\dfrac{v}{u^2+uv}$ [$\frac{u-v}{vu}$]
    c) $\dfrac{1}{z^2-z}-\dfrac{2}{z^2}+\dfrac{1}{z^2+z}$ [$\frac{2}{z^2(z-1)(z+1)}$]
    d) $\dfrac{2x-1}{x-3}-\dfrac{2x(x+2)}{x^2-9}-\dfrac{2}{3x}$ [$\frac{x-6}{3x(x+3)}$]
    e) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$ [0]
    f) $\dfrac{u}{u-v}+\dfrac{v}{v-u}-\dfrac{u+v-1}{u+v}$ [$\frac{1}{u+v}$]

7 Zusammenfassung

- Wir standen vor dem Problem, dass wir Brüche addieren mussten, die nicht den gleichen Nenner hatten.
- Wir haben uns gefragt, wie wir gleiche Nenner erhalten können.

- Wir haben herausgefunden, dass die Nenner dann gleich werden, wenn wir sie miteinander multiplizieren.
- Die Methode war leider nur bei einfachen Nennern erfolgreich. Bei Brüchen mit grossen Nennern hatten wir das Problem, dass die Zähler sehr gross wurden.
- Aus diesem Grunde mussten wir uns eine zweite Methode überlegen. Wir kamen auf die Idee, das kgV zu nehmen, wodurch sich die Rechnungen erheblich vereinfachten.
- Wir haben uns die Frage gestellt: Welche Methode wird wann am besten angewandt ? Wir fanden heraus: Methode II, wenn die Nenner Gemeinsamkeiten aufweisen, sonst die Methode I. Die Methode I hat den grossen Vorteil, dass sie nur eine Überlegung braucht und deshalb sehr leicht zu merken ist.