

1.4 Trigonometrie I

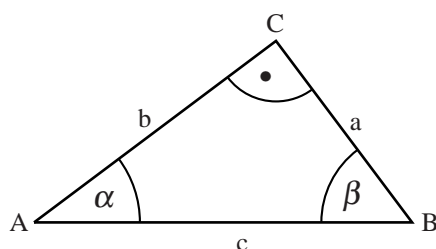
Inhaltsverzeichnis

1	Seitenverhältnisse beim rechtwinkligen Dreieck	2
2	Die trigonometrischen Funktionen	4
2.1	Was sind trigonometrischen Funktionen ?	4
2.2	Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck	4
2.3	Die 6 trigonometrischen Funktionen	5
2.4	Geometrische Veranschaulichung der trigonometrischen Funktionswerte	7
2.5	Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen	8

1 Seitenverhältnisse beim rechtwinkligen Dreieck

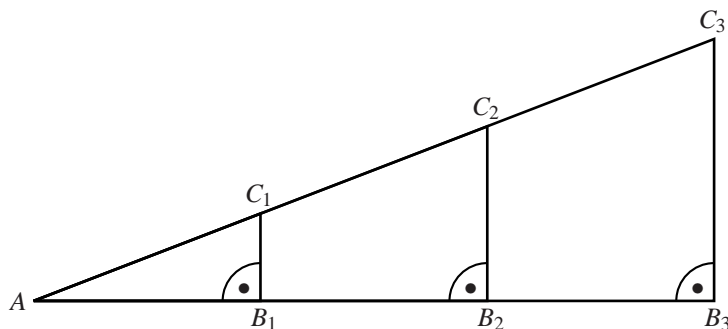
Das Wort Trigonometrie kommt aus dem griechischen: trigonon heisst Dreieck und metron heisst Mass. Trigonometrie heisst also Dreiecksvermessung.

Wir befassen uns bei diesem Thema **nur mit rechtwinkligen Dreiecken** $\triangle ABC$ mit den folgenden Bezeichnungen:

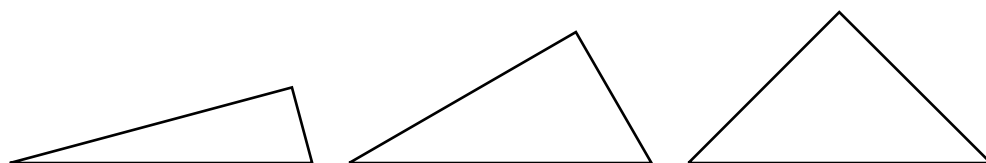


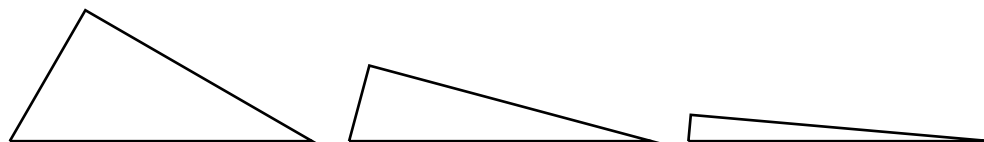
Einführungsaufgaben

1. Unten sind 3 Dreiecke mit gleichem Winkel α gezeichnet.



- Berechne das Verhältnis $\overline{AB_1} : \overline{AC_1}$ (d.h. wenn z.B. $\overline{AB_1} = 2 \text{ cm}$ und $\overline{AC_1} = 4 \text{ cm}$, dann ist das Verhältnis $\overline{AB_1} : \overline{AC_1} = 0.5$).
 - Berechne das Verhältnis $\overline{AB_2} : \overline{AC_2}$.
 - Berechne das Verhältnis $\overline{AB_3} : \overline{AC_3}$.
 - Was beobachtest Du bei den Aufgaben a) bis c) und was folgerst Du daraus ?
2. Unten sind 6 rechtwinklige Dreiecke mit den Winkeln $\alpha = 15^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $\alpha = 45^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $\alpha = 75^\circ$ und $\alpha = 85^\circ$ gezeichnet.

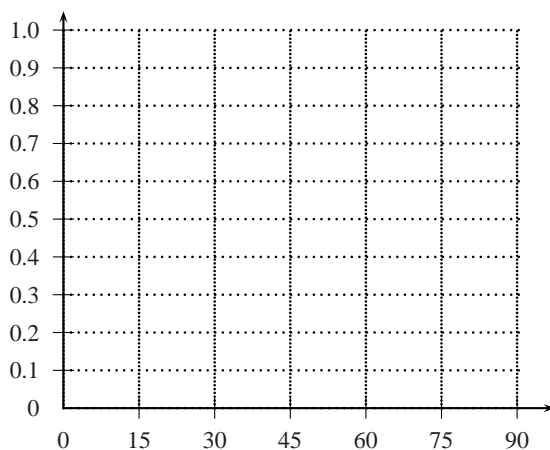




- a) Berechne bei den oberen 6 Dreiecken jeweils den Wert des Verhältnisses $\overline{BC} : \overline{AB}$ durch Abmessung. Trage Deine Ergebnisse dann in die untenstehende Tabelle ein.
- b) Berechne bei den oberen 6 Dreiecken jeweils den Wert des Verhältnisses $\overline{AC} : \overline{AB}$ durch Abmessung. Trage Deine Ergebnisse dann in die untenstehende Tabelle ein.
- c) Berechne bei den oberen 6 Dreiecken jeweils den Wert des Verhältnisses $\overline{BC} : \overline{AC}$ durch Abmessung. Trage Deine Ergebnisse dann in die untenstehende Tabelle ein.

	15°	30°	45°	60°	75°	85°
$\overline{BC} : \overline{AB}$						
$\overline{AC} : \overline{AB}$						
$\overline{BC} : \overline{AC}$						

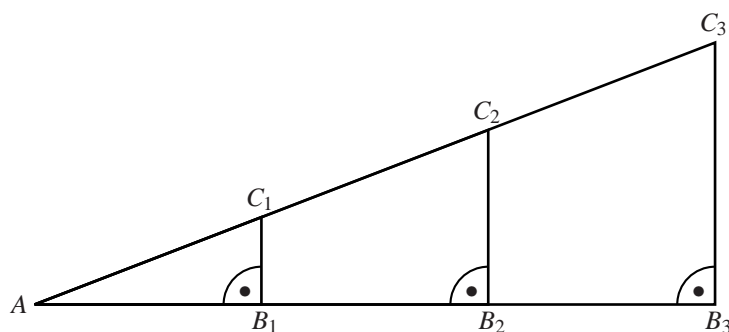
- d) Wir wollen nun die Werte der Tabelle in den untenstehenden Graphen einzeichnen. Trage auf der x -Achse die Winkel in 15°-er Abständen ein, auf der y -Achse die Verhältnisse in 0.1-Abständen. Wähle dabei für jede Zeile der Tabelle eine andere Farbe.



- e) Ändert sich etwas am Seitenverhältnis, wenn wir das Dreieck vergrößern, die Winkel aber gleich bleiben ?
- f) Welche Werte können wir erhalten ? Gibt es einen maximalen und einen minimalen Wert ?
- g) Wenn wir ein Verhältnis zu einem Winkel wissen, können wir dann das Verhältnis zum doppelten Winkel herausfinden ?
- h) Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 15^\circ$ und $c = 5$ cm. Berechne mit Hilfe der oben erstellten Tabelle die Seite a . [$a \approx 1.29$ cm]

2 Die trigonometrischen Funktionen

2.1 Was sind trigonometrischen Funktionen ?



Die Werte der Streckenverhältnisse

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{AC_4}} = \dots$$

oder

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{AB_3}}{\overline{B_3C_3}} = \frac{\overline{AB_4}}{\overline{B_4C_4}} = \dots$$

sind von der Lage des Lotes \overline{BC} unabhängig. Sie sind einzig und allein durch die Grösse des Winkels α bestimmt und ändern sich mit diesem.

Wir können einem Winkel **sein** Verhältnis zuordnen und umgekehrt einem Verhältnis den **dazugehörigen Winkel**. Beachte, dass diese Zuordnung **eindeutig** ist. In der Mathematik benutzt man für Zuordnungen den Begriff **Funktion**. Weil diese Zuordnung bei Dreiecken geschieht, sprechen wir von **trigonometrischen Funktionen**.

2.2 Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck

Ein rechtwinkliges Dreieck besteht aus drei Seiten, eine davon ist die **Hypothenuse** (liegt dem rechten Winkel gegenüber), die anderen beiden sind die **Katheten**. Bei den Katheten unterscheiden wir neu zwischen **Gegenkathete** und **Ankathete**.

2.3 Die 6 trigonometrischen Funktionen

Ingesamt erhalten wir beim rechtwinkligen Dreieck 6 verschiedene Verhältniswerte, die folgendermassen benannt und definiert werden:

- $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$
- $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$
- $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$
- $\cot(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a}$
- $\sec(\alpha) = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}} = \frac{c}{b}$
- $\text{cosec}(\alpha) = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{c}{a}$

Die beiden letztgenannten Funktionen werden selten gebraucht.

Die \sin , \cos und \tan -Funktion finden wir auf dem Taschenrechner. Ist das Verhältnis bekannt, so können wir mit \sin^{-1} , \cos^{-1} oder \tan^{-1} den dazugehörigen Winkel berechnen. Z.B. ist $\sin(30^\circ) = 0.5$ und $\sin^{-1}(0.5) = 30^\circ$.

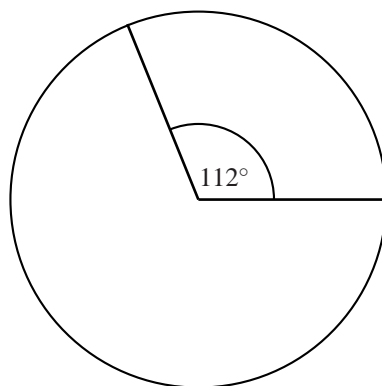
Beispiel

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit $a = 3 \text{ cm}$ und $\beta = 50^\circ$. Berechne die übrigen Seiten und Winkel.

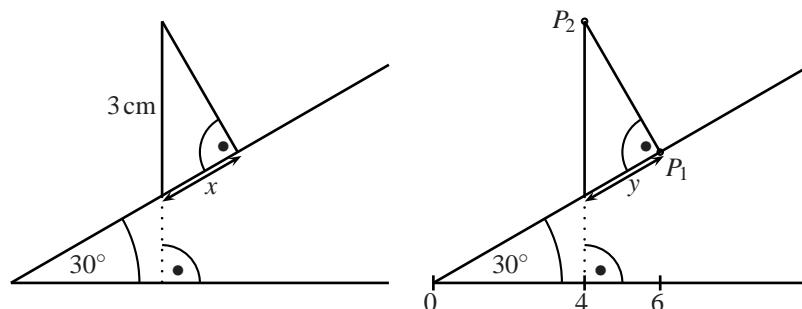
Übungen

3. Berechne die gesuchten Werte.
- a) $\sin 31^\circ =$ [0.52] b) $\tan 27^\circ =$ [0.51]
c) $\cos \alpha = 0.34; \alpha = ?$ [70.12°] d) $\tan \alpha = 2.5; \alpha = ?$ [68.20°]
4. Das Verhältnis bei einem rechtwinkligen Dreieck zwischen AK (bezogen auf α) und H beträgt 0.32. Wie gross ist der Winkel α ? [71.34°]
5. Berechne die fehlenden Winkel und Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn $b = 2.4$ cm und $\alpha = 67^\circ$ sind. [$a = 5.65$ cm, $c = 6.14$ cm, $\beta = 23^\circ$]
6. Aus einer Entfernung $e = 60$ m erblickt man die Spitze eines Turmes unter dem Höhenwinkel $\alpha = 27^\circ$. Wie hoch ist der Turm, wenn die Augenhöhe $a = 1.5$ m beträgt ? [32.07 m]
7. Welchen Flächeninhalt hat ein Parallelogramm (ein Viereck mit je zwei parallelen Seiten) mit
a) $a = 8$ cm, $d = 10$ cm, $\alpha = 60^\circ$ [$A = 69.28$ cm²] b) $a = 12.0$ m, $b = 7.5$ m, $\beta = 125^\circ$ [$A = 73.72$ m²]
8. Wenn man aus einer Höhe von 11.2 m auf einen Fluss schaut, erscheint das weiter entfernte Ufer unter dem Tiefenwinkel $\alpha = 8^\circ$. Wie breit ist der Fluss, wenn das Haus vom diesseitigen Ufer $e = 3.5$ m entfernt ist ? [76.19 m]

9. Ein Kreis hat den Radius $r = 3.2\text{ cm}$ und den Mittelpunktswinkel $\alpha = 112^\circ$. Berechne die Länge der dazugehörigen Sehne s . [$s = 5.3\text{ cm}$]



10. Berechne die Länge der Strecke x auf der linken Abbildung bzw. y und die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 auf der rechten Abbildung. [$x = 1.5\text{ cm}, y = 2.31, P_1(6|3.46), P_2(4|6.93)$]



11. Von einem Punkt P sind die Tangenten an den Kreis mit dem Mittelpunkt M und $r = 2.9\text{ cm}$ gezeichnet. Dabei ist $\overline{MP} = 4\text{ cm}$. Berechne den Winkel α , den die beiden Tangenten einschließen. [92.94°]
12. Von einem Haus in einem Tal beobachtet man die Bergspitze B unter dem Höhenwinkel $\beta = 17^\circ$, die Bergspitze A unter dem Höhenwinkel $\alpha = 20^\circ$. Die Bergspitze A liegt 1376 m ü.M., Bergspitze B 1616 m ü.M. und das Haus 887 m ü.M., wobei die Spitzen auf der gleichen Seite des Hauses liegen. Das Haus, die Bergspitzen A und B bilden eine zur Erdoberfläche lotrechte Ebene. Berechne die Entfernung e von der Bergspitze A zur Bergspitze B . [1068.24 m]
13. Berechne den Winkel, den die Raumdiagonale eines Würfels mit einer Kante einschliesst,
- wenn die Kantenlänge 10 cm beträgt. [54.74°]
 - wenn die Kantenlänge beliebig ist. [54.74°]
14. Ein Quader hat die Kanten $a = 5\text{ cm}, b = 4\text{ cm}$ und $c = 3\text{ cm}$. Berechne die Winkel α, β und γ , welche die Raumdiagonale des Quaders mit den Kanten a, b und c bildet. [$45^\circ, 55.55^\circ, 64.90^\circ$]

2.4 Geometrische Veranschaulichung der trigonometrischen Funktionswerte

Die trigonometrischen Funktionswerte können wir am Einheitskreis darstellen (Einheitskreis: Kreis, dessen Radius 1 ist).

2.5 Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen

Zwischen den trigonometrischen Funktionen lassen sich Zusammenhänge formulieren (Sätze).

Übung

15. Vereinfache folgende Terme.

a) $\tan \alpha \cdot \cos \alpha =$

c) $\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^3 \alpha =$

b) $\sin \alpha / \tan \alpha =$

d) $\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \tan^2 \alpha =$