1.2 Rechnen mit Termen II

(Thema aus dem Gebiet Algebra)

Inhaltsverzeichnis

1 Potenzen, bei denen der Exponent negativ oder 0 ist

Wir kennen folgendes Gesetz, das für $n, m \in \mathbf{N}$ mit $n > m$ gilt.

$$a^n : a^m =$$

Wir möchten dieses Gesetz nicht nur für $n > m$, sondern auch für $n = m$ und $n < m$ formulieren. Es treten dann aber Ausdrücke wie a^0 (z.B. $a^5 : a^5$) und a^{-2} (z.B. $a^3 : a^5$) auf. Im folgenden legen wir fest, wie wir mit solchen Ausdrücken umgehen wollen.

Definition 1 *Gegeben ist ein Term a, der nicht 0 ist und $n \in \mathbf{N}$. Dann gilt folgende Abmachung:*

Definition 2 *Gegeben ist ein Term a, der nicht 0 ist. Dann gilt folgende Abmachung:*

Bemerkung: Wir ordnen dem Term 0^0 keinen Wert zu. Die Frage, ob man diesem Term den Wert 1 oder keinen Wert zuordnen soll, hat zu vielen Diskussionen in der Mathematik geführt.

Beispiele:

2 Potenzregeln

Für die Multiplikation von speziellen Termen gibt es Gesetze (oder Sätze), die sogenannten **Potenzgesetze**.

Satz 1 *a ist ein Term und $m, n \in \mathbf{Z}$ (m, n sind Elemente der ganzen Zahlen, z.B. 2,3,0,-3). Dann gilt:*

Merke: Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem wir

Satz 2 *a, b sind Terme, $n \in \mathbf{Z}$. Dann gilt:*

Merke: Potenzen mit gleichen Exponenten werden multipliziert, indem wir

Satz 3 *a ist ein Term, $m, n \in \mathbf{Z}$. Dann gilt:*

Beispiele:

Übungen

1. Forme so um, dass sich das Endergebnis nicht weiter kürzen lässt.

a) $a^{101} \cdot a^{100} =$	b) $a \cdot a^n =$	c) $a^{n+2} \cdot a^{n+1}$	d) $2^{-3} \cdot 2^{-4} =$
e) $b^5 \cdot b^{-7} =$	f) $a^{-3} \cdot a^n =$	g) $b^{n+1} \cdot b^{-2} =$	h) $x^{-n} \cdot x^{-n} =$
i) $a^{-3} \cdot a^n =$	j) $z^7 : z^5 =$	k) $s^4 : s =$	l) $c^8 : c^0 =$
m) $z^9 : z^9 =$	n) $a^{n+1} : a^n =$	o) $4^5 : 4^{-1} =$	p) $6^0 : 6^{-2} =$
q) $c^{-2} : c^{-5} =$	r) $a^n : a^{n-1} =$		

$[a^{201}, a^{n+1}, a^{2n+3}, 2^{-7}, b^{-2}, a^{n-3}, b^{n-1}, x^{-2n}, a^{n-3}, z^2, s^3, c^8, 1, a, 4^6, 6^2, c^3, a]$

2. Fasse soweit wie möglich zusammen.

   a) $(-5n^2) \cdot 2n^3 \cdot (-2n)^3 =$
   b) $(-7a^3) \cdot (-2ab)^3 \cdot (-a^2 b) =$
   c) $(-6) \cdot (-2a) \cdot (-1.5a)^2 \cdot (-a)^3 =$
   d) $(-\frac{1}{4}) \cdot (-\frac{1}{2}a) \cdot (-6x) \cdot (-y)^2 =$

$[80n^8, -56a^8b^4, -27a^6, -\frac{3}{4}axy^2]$

3. Fasse soweit wie möglich zusammen.

   a) $(-a^3)^4 - (-2a)^3 + a^{12} - 3a^3 =$
   b) $(-2z)^3 - (-z^2)^3 + (-4z^3) + (-z)^6 - 5z^3 =$
   c) $(-2a^2b)^3 - 3a^4b(-4ab)^2 - (-5a^6b^2)(-b) =$
   d) $(-a^2)^2 - 3a(-\frac{1}{3}a^3) + a^2(-a^2) =$

$[2a^{12} + 5a^3, 2z^6 - 17z^3, -61a^6b^3, a^4]$

4. Forme so um, dass das Endergebnis keine Klammern enthält und es sich nicht mehr weiter zusammenfassen lässt.

   a) $3^{-n} \cdot 2^{-n} =$
   b) $4^{-6} \cdot 2.5^{-6} =$
   c) $(6x)^{-n} \cdot (3x)^{-n} =$
   d) $\left(7^0\right)^{-7} =$
   e) $\left(-10^4\right)^5 =$
   f) $\left((-10)^4\right)^5 =$
   g) $\left((-10)^5\right)^{-4} =$
   h) $\left(3^{-2}\right)^{-3} =$

$[6^{-n}, 10^{-6}, 18^{-n}x^{-2n}, 1, -10^{20}, 10^{20}, 10^{-20}, 3^6]$

3 Terme mit Wurzelausdrücken

Der Wurzelbegriff ist uns bekannt. Die Wurzel von 36 ist 6, weil $6 \cdot 6 = 36$ ist. Bei Wurzeln müssen wir immer die folgenden zwei Punkte beachten:

4 Wurzelgesetze

Satz 4 *$a \geq 0$ und $b \geq 0$ sind beliebige Terme. Dann gilt:*

Satz 5 *$a \geq 0, b > 0$ sind beliebige Terme. Es gilt:*

Beispiele

5. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Wurzelzeichen vorkommt.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} =$ b) $\sqrt{72} : \sqrt{2} =$ c) $\sqrt{20} : \sqrt{5} =$ d) $\sqrt{a^2}$

e) $\sqrt{b^4} =$ f) $\sqrt{\dfrac{c^3d}{cd^3}} =$ g) $\sqrt{4p^2q^6} =$ h) $\sqrt{\dfrac{12r^4st^2}{27s^5t^2}} =$

i) $\sqrt{xy} \cdot \sqrt{xz} \cdot \sqrt{yz} =$ j) $\sqrt{\dfrac{5}{33}} \cdot \sqrt{\dfrac{11}{15}} =$ k) $(a\sqrt{a})^2 =$ l) $\sqrt{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6\sqrt{2}} =$

$[6, 6, 2, a, b^2, \frac{c}{d}, 2pq^3, \frac{2r^2}{3s^2}, xyz, \frac{1}{3}, a^3, 6]$

6. Fasse soweit wie möglich zusammen.

a) $\sqrt{ab} + 3\sqrt{ab} - 2\sqrt{ab} =$ b) $\sqrt{ab} - \sqrt{9ab} =$

c) $\sqrt{a} + \sqrt{a^2} + \sqrt{a^3} =$ d) $\sqrt{ab} - \sqrt{ac} - (2\sqrt{ab} + \sqrt{ac})$

$[2\sqrt{ab}, -2\sqrt{ab}, \text{bleibt}, -\sqrt{ab} - 2\sqrt{ac}]$

5 Das Distributivgesetz

Als erstes legen wir fest, wie wir mit einer Kombination von Addition, Multiplikation und Klammern umgehen wollen. Später werden wir sehen, dass diese Festlegung nicht zufällig, sondern in Übereinstimmung mit unseren Beobachtungen steht. Das ist wichtig, wenn die Mathematik für alltägliche Berechnungen tauglich sein soll.

Definition 3 *(Distributivgesetz) a, b und c sind Terme. Wir legen fest:*

Satz 6 *a, b und c sind Terme. Dann gilt:*

Beweis:

Übungen

7. Verwandle die folgenden Produkte in Summen oder Differenzen !

a) $5 \cdot (8a + 7b) =$ b) $7 \cdot (9x - 11y) =$

c) $2a \cdot (3u + 5w) =$ d) $11a \cdot (9a + 7b) =$

e) $8ab \cdot (9a - 17b) =$ f) $3x^2y \cdot (6x^2y - 5xy^2) =$

g) $13a \cdot (3a + 4b - 5c + 6d) =$ h) $7 \cdot [(9x - 11y) + 5z] =$

$[40a + 35b, 63x - 77y, 6au + 10aw, 99a^2 + 77ab, 72a^2b - 136ab^2, 18x^4y^2 - 15x^3y^3, 39a^2 + 52ab - 65ac + 78ad, 63x - 77y + 35z]$

8. Verwandle die folgenden Produkte in Summen oder Differenzen !

a) $(45e - 15f) \cdot (-1) =$ b) $(21u - 77v) : (-7) =$

c) $(48a^2b - 168ab^2) : (b =$ d) $(25a^8 - 20a^6 - 55a^4) : 5a^2 =$

e) $(287x^{287} - 205x^{205}) : 41x^{41} =$

$[-45e + 15f, -3u + 11v, 4a - 14b, 5a^6 - 4a^4 - 11a^2, 7x^{246} - 5x^{164}]$

9. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

a) $11(7a + 3b) + 8(5a - 2b) =$

b) $7(7a+3b)-8(5a+3b)=$

c) $\sqrt{2}a(\sqrt{2}a+\sqrt{8}b)=$

d) $5x(9x-7y)-8y(5x-6y)-32(x^2+y^2)=$

e) $\frac{3}{5}\left(\frac{2}{7}a+\frac{5}{14}b\right)-\frac{3}{7}\left(\frac{2}{5}a-\frac{11}{20}b\right)=$

f) $\sqrt{12a}(\sqrt{3a}+\sqrt{8b})-\sqrt{6}(\sqrt{6}a+4\sqrt{ab})=$

$\left[117a+17b, 9a-3b, 2a^2+4ab, 13x^2+16y^2-75xy, \frac{9}{20}b, 0\right]$

10. Setze an Stelle der Variablen Zahlen (bzw. Mengen) ein und prüfe, ob die Gleichheit gilt ! Die Bedeutung der Zeichen aus der Mengenlehre:

- $\cup$: Vereinigung
- $\cap$: Schnittmenge
- $\setminus$: ohne

a) $a:(b+c)=a:b+a:c$?

b) $(a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2$?

c) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$?

d) $(a-b)^2=a^2-b^2$?

e) $(a\cdot b):c=(a:c)\cdot(b:c)$?

f) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$?

g) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$?

h) $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$?

[f,w,w,f,f,w,w,w]

6 Multiplikation von Summen und Differenzen

Satz 7 *a, b, c und d sind Terme. Es gilt:*

Beweis:

Übungen

11. Multipliziere die folgenden Terme mit Hilfe der Substitution aus !

a) $(a+b)\cdot(c+d) =$ b) $(a-b)\cdot(c-d) =$

12. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

a) $(2a+b)\cdot(3b-d) =$ b) $(3a-b)\cdot(c-2d) =$

c) $(2a+b+3c)\cdot(d-2e) =$ d) $(a^2+b^3-c^4)\cdot(d^2+e^3) =$

$[6ab-2ad+3b^2-bd, 3ac-6ad-bc+2bd, 2ad-4ae+bd-2be+3cd-6ce, a^2d^2+a^2e^3+b^3d^2+b^3e^3-c^4d^2-c^4e^3]$

13. Berechne mit dem Distributivgesetz !

a) 77·2003 = b) 13·199 =

c) 73·9998 = d) 2003·18 =

14. Berechne den Flächeninhalt des nebenstehenden Rechtecks auf zwei Wegen (1.Weg: Länge mal Breite; 2.Weg: Alle Rechtecke einzeln berechnen und dann addieren) und vergleiche die Ergebnisse !

15. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

a) $(4a+9b)(3a+2b)-(2a-3b)(6a-6b) =$

b) $(5x-9)(6y+11)-(3x+10)(10y-3) =$

c) $(a+1)(a-2)-(a-3)(a+4) =$

d) $(b-1)(b+3)+(b^2+3b)(b+1) =$

e) $(\sqrt{6x}-9)(\sqrt{6x}+5)+(\sqrt{2x}-11)(\sqrt{8x}+22) =$

f) $(\sqrt{x}-5)(2\sqrt{x}-16)-(3-\sqrt{x})(\sqrt{x}-9) =$

g) $(2e^2-3f^2)(3e^2-5f^2)-(3e^2-5f^2)(e^2+f^2) =$

h) $(4x^2-6y^2)(6x^2+9y^2)-(4x^4+9y^4) =$

$[65ab, 64x-154y-69, -2a+10, b^3+5b^2+5b-3, 10x-4\sqrt{6x}-287, 3x-38\sqrt{x}+107, 3e^4-17e^2f^2+20f^4, 20x^4-63y^4]$

16. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

a) $xy(9w+11x)(8y-5z) =$ b) $a^2b(7a-2b)(14a+4b) =$

$[72wxy^2-45wxyz+88x^2y^2-55x^2yz, 98a^4b-8a^2b^3]$

17. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

a) $(a+b)(c+d)(e+f) =$ b) $(2a+3b)(a+4b)(3a+b) =$

c) $(a+b)(c-d)(e-f) =$ d) $(2a+3b)(a-4b)(3a-b) =$

$[ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf, 6a^3+35a^2b+47ab^2+12b^3]$
$[ace-acf-ade+adf+bce-bcf-bde+bdf, 6a^3-17a^2b-31ab^2+12b^3]$

18. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

a) $(a+b+c)^2 =$ b) $(a+b-c)(a+b+c) =$
c) $(a+b-c)^2 =$ d) $(a+b-c)(a-b+c) =$
e) $(2u-5v+w)^2 =$ f) $(5a+3b)^2-(5a-3b)^2 =$

$[a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc, a^2+2ab+b^2-c^2, a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc]$
$[a^2-b^2+2bc-c^2, 4u^2+25v^2+w^2-20uv+4uw-10vw, 60ab]$

7 Binomische Formeln

Ausdrücken der folgenden Form werden wir häufig begegnen:

- $(a+b)^2 =$
- $(a-b)^2 =$
- $(a+b)(a-b) =$

Satz 8 *a und b sind Terme. Es gilt:*

19. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

a) $(u+v)^2 =$ b) $(2a+3b)^2 =$
c) $(2a+b)(2a-b) =$ d) $(3u-5)^2 =$
e) $(12a-11b)^2 =$ f) $(21x+5)(21x-5) =$
g) $[3a(4u-5v)]^2 =$ h) $[4(8u-9v)]^2 =$

$[u^2+2uv+v^2, 4a^2+12ab+9b^2, 4a^2-b^2, 9u^2-30u+25, 144a^2-264ab+121b^2]$
$[441x^2-25, 144a^2u^2-360a^2uv+225a^2v^2, 1024u^2-2304uv+1296v^2]$

20. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

a) $\left(\frac{e}{5}-\frac{f}{6}\right)\left(\frac{e}{5}+\frac{f}{6}\right) =$ b) $\left(\frac{6e}{5}-\frac{5f}{6}\right)^2 =$

c) $\left(\frac{3}{5}u-5v\right)^2=$
d) $(n\sqrt{8}-p\sqrt{18})^2=$
e) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=$
f) $(\sqrt{4u-5v}+\sqrt{4u+5v})^2=$

$[\frac{e^2}{25}-\frac{f^2}{36},\frac{36e^2}{25}-2ef+\frac{25f^2}{36},\frac{9u^2}{25}-6uv+25v^2,8n^2-24np+18p^2,a-b,8u+2\sqrt{16u^2-25v^2}]$

21. Ergänze die folgenden Gleichungen so, dass sie binomische Formeln wiedergeben !

a) $(3x+\ldots)^2=\ldots+\ldots+49$
b) $(\ldots-4)^2=\ldots-48y+\ldots$
c) $(\ldots+\ldots)^2=4x^2+32x+\ldots$
d) $(\ldots+\ldots)^2=\ldots+180x+100$
e) $(\ldots-\ldots)^2=36x^4-24x^2+\ldots$
f) $(\ldots-\ldots)^2=\ldots-130a+169$
g) $(3a+\ldots)(\ldots-5)=\ldots-\ldots$
h) $(\ldots+\ldots)(\ldots-3c)=-\ldots+4d^2$
i) $(\ldots+6)(\ldots-\ldots)=\ldots-100p^6$

22. Schreibe mit Klammern als binomischer Ausdruck, falls möglich:

a) $b^2+10b+25=$
b) $x^2-y^2=$
c) $b^2-bc-c^2=$
d) $4a^2+12ab+9b^2=$
e) $a^2+4ab+b^2=$
f) $4a^2-b^2=$

$[(b+5)^2,(x+y)(x-y),n.m.,(2a+3b)^2,n.m.,(2a+b)(2a-b)]$

8 Summen und Differenzen mit höheren Potenzen

In diesem Abschnitt geht es darum, Potenzen der Form $(a+b)^3,(a+b)^4$, usw. zu berechnen. Wir können alles ausmultiplizieren, was sehr mühsam und zeitraubend ist. Viel schneller geht es mit dem Pascalschen Dreieck, welches folgendermassen aussieht:

Beispiele:

- Berechne den Term $(a+b)^3$!

  Lösung

- Berechne $(a-b)^5$!

  Lösung

23. Berechne die folgenden Ausdrücke mit dem Pascalschen Dreieck und mit normalem Ausmultiplizieren. Vergleiche danach die Resultate !

    a) $(a+b)^3 =$ b) $(a+b)^4 =$

24. Berechne mit dem Pascalschen Dreieck und überprüfe mit dem Taschenrechner !

    a) $(3-2)^4 =$ b) $(2+3)^5 =$

25. Berechne die folgenden Ausdrücke mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks !

    a) $(a-b)^4 =$ b) $(3a+5b)^4 =$

    c) $(2u-1)^5 =$ d) $(-a+1)^6 =$

$[a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4, 81a^4 + 540a^3b + 1350a^2b^2 + 1500ab^3 + 625b^4]$
$[32u^5 - 80u^4 + 80u^3 - 40u^2 + 10u - 1, a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1]$