# 1.12 Einführung in die Vektorrechung

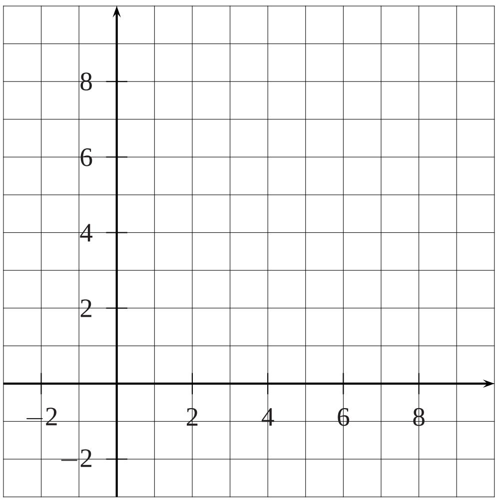
## Inhaltsverzeichnis

# 1 Definition des Vektors

**Definition 1** *Ein **Vektor** $\vec{a}$ ist ein Pfeil mit gegebener Richtung und gegebener Länge.*

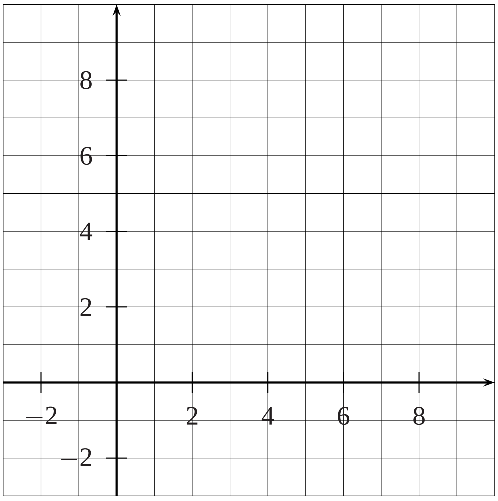
Einen Vektor mit gegebenem Anfangspunkt $A$ und gegebenem Endpunkt $B$ bezeichnen wir mit $\overrightarrow{AB}$. Wir betrachten Vektoren in der Ebene (2-dim. Vektoren) und im Raum (3-dim. Vektoren).

Auf der folgenden Abbildung sehen wir ein paar Beispiele von Vektoren.




**Definition 2** *Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ betrachten wir als gleich, d.h. $\vec{a} = \vec{b}$, wenn sie die gleiche Richtung und die gleiche Länge haben.*

Diese Definition scheint auf den ersten Blick überflüssig zu sein. Sie sagt aus, dass uns der Anfangspunkt eines Vektors nicht interessiert. Ein Beispiel dazu:



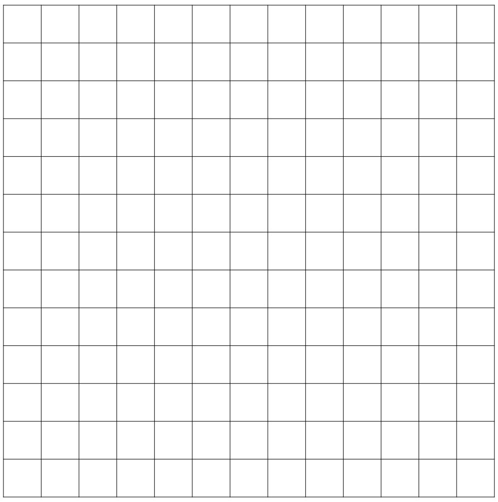

Alle diese Vektoren werden als gleich angesehen, obwohl sie nicht am gleichen Ort beginnen. Wenn uns jemand den Auftrag gibt, einen bestimmten Vektor $\vec{a}$ auf ein Blatt Papier zu zeichnen, dann können wir den Anfangspunkt auswählen.

Schliesslich definieren wir noch einen speziellen Vektor, den Nullvektor.

**Definition 3** *Der **Nullvektor** hat die Länge 0 und eine unbestimmte Richtung.*

In der Physik nennen wir Grössen, die durch Angabe eines Vektors festgelegt werden können, **Vektorgrössen** (z.B. Geschwindigkeiten, Kräfte). Grössen, die schon durch Angabe einer reellen Zahl allein bestimmt werden können (z.B. Massen, Temperaturen), heissen **Skalare**.

# 2 Skalare Multiplikation und Kehrvektor



**Definition 4** *Ist $\vec{a}$ ein Vektor und $x$ eine reelle Zahl, so versteht man unter $x\vec{a}$ den Vektor mit der $|x|$-fachen Länge und mit der gleichen oder entgegengesetzten Richtung von $\vec{a}$, je nachdem ob $x$ positiv oder negativ ist.*

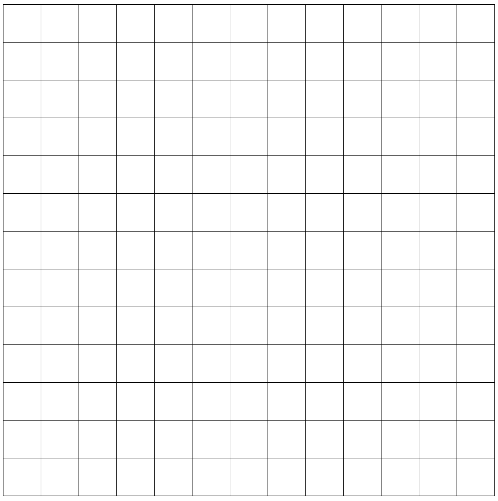
**Definition 5** *Der **Kehrvektor** von $\vec{a}$ ist gleich lang wie $\vec{a}$, hat aber die entgegengesetzte Richtung. Wir bezeichnen ihn mit $-\vec{a}$.*

Für den Vektor $\overrightarrow{AB}$ mit Anfangspunkt $A$ und Endpunkt $B$ ist der Kehrvektor der Vektor $\overrightarrow{BA}$. Beachte, dass diese Vektoren **nicht gleich** sind, weil sie nicht die gleiche Richtung haben (aber den gleichen Betrag).

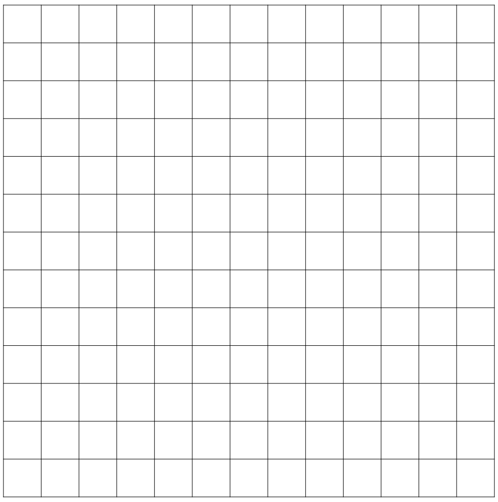
# 3 Addition und Subtraktion von Vektoren

## 3.1 Addition von zwei Vektoren

**Definition 6** *Die Summe $\vec{a}+\vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist der Vektor, welcher der Zusammensetzung der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ entspricht.*

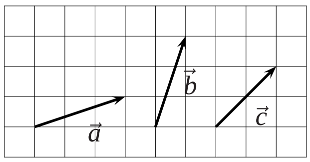


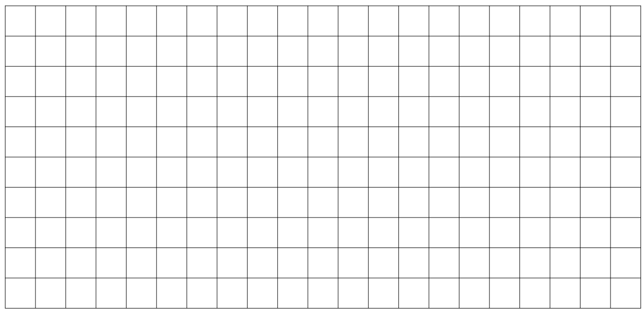
**Definition 7** *Die Differenz* $\vec{a} - \vec{b}$ *zweier Vektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *definieren wir als den Vektor* $\vec{a} + (-\vec{b})$.



## 3.2 Addition von mehreren Vektoren

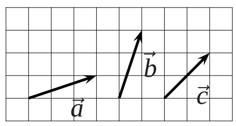
Die Addition von mehreren Vektoren lässt sich zurückführen auf die Addition von zwei Vektoren. Ein Beispiel:



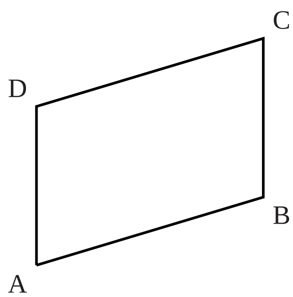
**Übungen**

1. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$.




   a) Konstruiere die Vektoren $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{c}, \vec{a}-\vec{b}$ und $\vec{a}-\vec{c}$.
   b) Prüfe, ob das Kommutativgesetz gilt: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
   c) Prüfe, ob das Distributivgesetz gilt: $2\vec{a}+2\vec{b}=2(\vec{a}+\vec{b})$
   d) Kontruiere den Vektor $\vec{d}$ so, dass gilt: $\vec{a}+2\vec{b}+\vec{d}=\vec{0}$

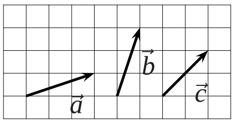
2. Die Vektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AD}$ beziehen sich auf das untenstehende Parallelgramm. Fülle die Lücken aus.



a) $\overrightarrow{AB} = .....$ b) $\overrightarrow{BC} = .....$ c) $\overrightarrow{BA} = .....$

d) $\overrightarrow{DC} = .....$ e) $\overrightarrow{AD} = .....$ f) $\overrightarrow{CB} = .....$

3. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$.

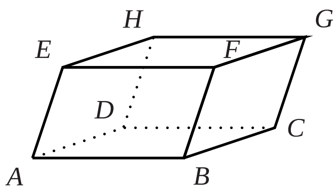



   a) Konstruiere den Vektor $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
   b) Konstruiere den Vektor $2\vec{a} + 0.5\vec{b} + \vec{c}$.
   c) Konstruiere den Vektor $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$.
   d) Prüfe, ob das Assoziativgesetz der Addition gilt: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

4. Ein Dreieck ABC ist durch $\overline{AB}$ = $\vec{c}$ und $\overline{BC}$ = $\vec{a}$ gegeben. Der Punkt D ist Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Drücke die Vektoren $\overline{AC}$,$\overline{AD}$ und $\overline{CD}$ mit den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$ aus.

5. (1.5 P.) Gegeben ist ein Parallelogramm mit den Eckpunkten A,B,C und D und dem Schnittpunkt E der Diagonalen, die einander halbieren. Gegeben sind nun die Vektoren $\vec{AB} = \vec{a}$ und $\vec{BC} = \vec{b}$. Drücke die Vektoren $\vec{AC}$ und $\vec{ED}$ mit diesen beiden Vektoren aus.

6. Gegeben ist ein Spat (ein von sechs Parallelogrammen begrenzter Körper, siehe untenstehende Zeichnung) durch die Vektoren $\vec{a} = \overline{AB}$, $\vec{b} = \overline{AD}$ und $\vec{c} = \overline{AE}$. Drücke die Vektoren $\overline{AC}$, $\overline{BG}$, $\overline{AF}$, $\overline{EC}$, $\overline{AG}$ und $\overline{HF}$ durch $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus.




# 4 algebraische Darstellung von Vektoren

Bisher haben wir Vektoren nur gezeichnet. Wie können wir aber jemandem am Telefon mitteilen, um welchen Vektor es geht ? Ganz einfach, indem wir das Koordinatensystem zu Hilfe nehmen. Genauso wie wir einem Punkt Koordinaten zuordnen können, können wir auch einem Vektor Zahlen zuordnen, die sogenannten Komponenten. Auf der Ebene hat ein Vektor zwei Komponenten ($x$- und $y$-Komponenten), im Raum sind es drei Komponenten ($x$-, $y$- und $z$-Komponenten).

**Beispiele**

- Wir betrachten den Vektor $\vec{a}$ in der Ebene: $\vec{a} = \binom{4}{3}$. Der Vektor geht um 4 Einheiten in $x$-Richtung und um 3 Einheiten in $y$-Richtung.

- Wir betrachten den Vektor $\vec{b}$ in der Ebene: $\vec{b} = \binom{-2}{-4}$. Der Vektor geht um 2 Einheiten in die negative $x$-Richtung und um 4 Einheiten in die negative $y$-Richtung.
- Wir betrachten den Vektor $\vec{c}$ im Raum: $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Vektor geht um 2 Einheiten in $x$-Richtung, um 2 Einheiten in $y$-Richtung und um 1 Einheit in $z$-Richtung.

Überlegen wir uns als Nächstes, wie wir die Länge eines Vektors berechnen können:

**Definition 8** *Gegeben ist der Vektor* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. *Der* ***Betrag (Länge)*** $|\vec{a}|$ *von* $\vec{a}$ *definieren wir folgendermassen:* $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

**Definition 9** *Gegeben ist der Vektor* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$. *Der* ***Betrag (Länge)*** $|\vec{a}|$ *von* $\vec{a}$ *ist:* $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

**Übungen**

7. Zeichne die folgenden Vektoren in ein Koordinatensystem ein:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{d} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ e) $\vec{e} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ f) $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

8. Berechne die Länge der folgenden Vektoren:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ [$\sqrt{8}$] b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ [$\sqrt{14}$] c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ [5]

9. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen (Repetition) !

a) $x^2 = 81$ b) $x^2 - 64 = 0$ c) $x^2 - 19 = 6$

d) $x^2 - 4 = 0$ e) $x^2 - x - 6 = 0$ f) $x^2 - 8x - 19 = 1$

[$\pm 9, \pm 8, \pm 5, \pm 2, \{-2, 3\}, \{-2, 10\}$]

10. Für den Vektor $\vec{v} = \left(x|3\right)$ gilt: $|\vec{v}| = 5$ Berechne $x$. [$x_{1,2} = \pm 4$]

11. Für den Vektor $\vec{v} = (4|y|8)$ gilt: $|\vec{v}| = 12$ Berechne $y$. [$y_{1,2} = \pm 8$]

12. Der Vektor $\vec{v} = (x|y|3)$ hat die Länge $|\vec{v}| = 7$ und die $x$-Komponente ist um 8 grösser als die $y$-Komponente. Berechne $x$ und $y$. [$x_1 = 2, y_1 = -6; x_1 = 6, y_1 = -2$]

# 5 algebraische Grundoperationen mit Vektoren

Wir wollen nun die Grundoperationen bei Vektoren definieren, die algebraisch dargestellt sind. Diese Definitionen sind so gewählt, dass sie mit den geometrischen aus den vorderen Abschnitten übereinstimmen.

**Definition 10** *Gegeben sind die Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$*. Unter der* ***Summe*** $\vec{a} + \vec{b}$ *verstehen wir:*

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

**Definition 11** *Gegeben sind die Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$*. Unter der* ***Differenz*** $\vec{a} - \vec{b}$ *verstehen wir:*

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

**Definition 12** *Gegeben ist der Vektor* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ *und* $x \in \boldsymbol{R} \backslash \{0\}$*. Die* ***skalare Multiplikation*** $x \cdot \vec{a}$ *des Vektors* $\vec{a}$ *definieren wir folgendermassen:*

$$x \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} x \cdot a_1 \\ x \cdot a_2 \\ x \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

**Definition 13** *Gegeben ist der Vektor* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$*. Unter dem* ***Kehrvektor*** $-\vec{a}$ *verstehen wir den Vektor*

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

**Beispiel**

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$. Berechne den Vektor $\frac{1}{2}\vec{a} + 3 \cdot \vec{b} - 2 \cdot \vec{c}$, wenn

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

**Übungen**

13. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Berechne die Komponenten des Vektors $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$, wenn [$\begin{pmatrix} -13 \\ 19 \end{pmatrix}$]

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

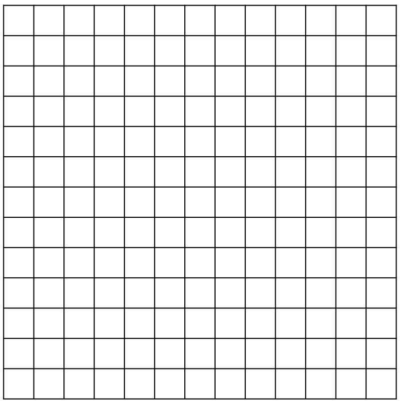
14. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$. Berechne die Komponenten des Vektors $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} - 0.5\vec{c}$, wenn [$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$]

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

# 6 Der Abstand zwischen zwei Punkten

## 6.1 Die Bildung eines Vektors aus zwei Punkten

Wir betrachten ein Beispiel:



**Frage 1:** Gegeben sind die Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$. Wie lauten nun die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ ?

**Überlegung:** Wir nehmen einfach die Differenz bei der $x$-, $y$- und $z$-Komponente.

**Antwort:** $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

**Frage 2:** Gegeben sind die Punkte $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$. Wie gross ist der Abstand zwischen den beiden Punkten ?

**Überlegung:** Wir bilden zuerst den Vektor $\vec{AB}$ und berechnen danach die Länge dieses Vektors. Die Länge entspricht gerade dem Abstand zwischen den zwei Punkten.

**Antwort:** Der Abstand beträgt $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

## 6.2 allgemeiner dreidimensionaler Fall

Wir rechnen gleich wie beim zweidimensionalen Fall, einfach mit einer Komponente mehr.

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

- $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

## 6.3 Ein Abstandsproblem

**Aufgabe:** Welche Punkte auf der $z$-Achse haben von $P(-6|3|7)$ den Abstand 7 ? [$z_1 = 5, z_2 = 9$]

**Übungen**

15. Gegeben sind die Punkte A und B. Berechne den Vektor $\overrightarrow{AB}$, wenn

    a) $A(1|2|1)$ und $B(1|4|5)$ b) $A(2|0|6)$ und $B(1|4|0)$

    [$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$]

16. Berechne den Abstand zwischen den Punkten $A$ und $B$, wenn

    a) $A(2|4|5)$ und $B(0|1|4)$ [$\sqrt{14}$] b) $A(-4|-2|3)$ und $B(-1|-3|-2)$ [$\sqrt{35}$]

17. Berechne den Umfang des Dreiecks $\Delta ABC$, wobei $A(-1|-3), B(3|-3)$ und $C(8|9)$. [32]

18. Wie muss $y$ gewählt werden, damit die Strecke $AB$ mit $A(7|1|5)$ und $B(6|y|-3)$ die Länge 9 hat ? [$y_1 = -3, y_2 = 5$]

19. Welche Punkte auf der $x$-Achse haben von $P(2|3|-6)$ den Abstand 9 ? [$x_1 = -4, x_2 = 8$]

20. Bestimme zeichnerisch und rechnerisch den Punkt $P$ auf der $x$-Achse, der von $A(-2|1)$ und $B(4|5)$ gleich weit entfernt ist. [$P(3|0)$]

21. Welcher Punkt $P$ auf der $y$-Achse ist von $A(7|0|-4)$ und $B(-3|1|-7)$ gleich weit entfernt ? [$P(0|-3|0)$]

# 7 linear abhängige Vektoren und kolineare Vektoren

**Definition 14** *Gegeben sind 3 Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$. $\vec{c}$ *ist* ***linear abhängig*** *von* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$, *wenn es x,y* $\in \boldsymbol{R}$ *so gibt, dass gilt:* $\vec{c} = x\cdot\vec{a}+y\cdot\vec{b}$.

**Beispiel:** Ist der Vektor $\vec{c}$ linear abhängig von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wenn

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{c} = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix}?$$

**Lösung:**

- $\begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cdot 1 \\ x\cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y\cdot 2 \\ y\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y \\ 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}$
- Es entstehen zwei Gleichungen mit je zwei Unbekannten: $\left| \begin{array}{l} 8 = x+2y \\ 18 = 3x+4y \end{array} \right|$
- Wir lösen die erste Gleichung nach $x$ auf: $\underline{x = 8-2y}$.
- Wir setzen für $x$ in den zweiten Gleichung $8-2y$ ein.
- $18 = 3(8-2y)+4y \Rightarrow 18 = 24-6y+4y \Rightarrow -6 = -2y \Rightarrow \underline{y=3}$
- Wir setzen $y=3$ in die erste Gleichung ein: $8 = x+2\cdot 3 \Rightarrow 8 = x+6 \Rightarrow \underline{x=2}$
- Damit: $\begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{c}$ ist linear abhängig von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

**Definition 15** *Gegeben sind zwei Vektoren* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *sind* ***kolinear*** *(parallel) zueinander, wenn es eine Zahl* $x \in \boldsymbol{R}$ *so gibt, dass gilt:* $\vec{a} = x\cdot\vec{b}$.

**Beispiel:**

Sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$ kolinear zueinander ?

- $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = x\cdot\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x \\ 12x \\ 15x \end{pmatrix}$

- Bei allen 3 Komponenten gilt: $x = \frac{1}{3}$. Damit sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander kolinear.

**Übungen**

22. Prüfe, ob der Vektor $\vec{c}$ linear abhängig von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

    a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$

    b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \end{pmatrix}$

    c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \end{pmatrix}$

23. Sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander kolinear (parallel), wenn

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}?$$