

# Trigonometrie II - Berechnungen am allgemeinen Dreieck mit $\alpha < 90^\circ, \beta < 90^\circ$ und $\gamma < 90^\circ$

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Der Sinussatz</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Der Cosinussatz</b>	<b>3</b>

## 1 Einführung

Bisher haben wir Berechnungen am rechtwinkligen Dreieck angestellt. Dies geschah meistens mit Hilfe des Satzes von Pythagoras und den trigonometrischen Funktionen  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$  (z.T. auch mit dem Höhensatz,...). Wir beschäftigen uns nun mit dem **allgemeinen Dreieck** und lernen neue Formeln (Sätze) kennen, die uns auch Berechnungen am allgemeinen Dreieck erlauben. Wir beschränken uns allerdings auf Dreiecke, deren Innenwinkel allesamt kleiner als  $90^\circ$  sind. Sonst müssten wir z.B.  $\sin(120^\circ)$  berechnen, was wir noch nicht behandelt haben.

## 2 Der Sinussatz

**Aufgabe:** Bei einem Dreieck sind  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 5 \text{ cm}$  und  $\alpha = 50^\circ$  bekannt. Berechne  $\beta$  (Tipp: Zeichne  $h_c$  als Hilfslinie ein). [ $\beta = 39.67^\circ$ ]

**Lösung**

Wir können die gleiche Rechnung auch ohne konkrete Zahlen durchführen:

**Satz 1** (Sinussatz) *Für jedes Dreieck  $\triangle ABC$  mit  $\alpha, \beta, \gamma \leq 90^\circ$  gilt:*

Später werden wir sehen, dass dieser Satz auch für stumpfwinklige Dreiecke gilt. In Worten bedeutet dieser Satz:

„Bei einem Dreieck ist das Verhältnis zwischen dem Sinus eines Winkels und der gegenüberliegenden Seite immer gleich“

### Übungen

1. Von einem Dreieck sind bekannt:  $\alpha = 43^\circ, \gamma = 55^\circ$  und  $a = 3$  cm. Berechne  $c$ . [ $c \approx 3.60$  cm]
2. Von einem Dreieck sind bekannt:  $\alpha = 70^\circ, \beta = 50^\circ$  und  $c = 6$  cm. Berechne die Längen  $a$  und  $b$  !  
[ $a \approx 6.51$  cm,  $b \approx 5.31$  cm]
3. Gegeben ist ein Dreieck mit  $w_\gamma = 5,3$  m (Winkelhalbierende),  $\alpha = 80^\circ$  und  $\gamma = 57^\circ$ . Berechne die Seite  $b$  !  
[5.1 m]
4. Zwei Punkte  $A$  und  $B$  am Ufer eines Flusses sind 45 m voneinander entfernt. Am anderen Ufer steht ein Baum  $C$ . Es werden folgende Winkel gemessen:  $\angle(CAB) = 72^\circ$  und  $\angle(CBA) = 83^\circ$ . Wie breit ist der Fluss ?  
[100.51 m]
5. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Sinussatz und der trigonometrischen Funktion  $\sin(\alpha) = \frac{GK}{H}$  ?

## 3 Der Cosinussatz

**Aufgabe:** Von einem Dreieck  $\triangle ABC$  sind die Längen  $a = 6$  cm,  $b = 4$  cm und  $c = 7$  cm bekannt. Berechne die Grösse des Innenwinkels  $\alpha$ . (Tipp: Zeichne  $h_c$  als Hilfslinie ein und berechne  $|\overline{AH_c}|$ ). [ $\alpha = 58.81^\circ$ ]

**Lösung:**

Der allgemeine Lösungsweg:

**Satz 2** (Cosinussatz) *Für jedes Dreieck  $\Delta ABC$  mit  $\alpha, \beta, \gamma \leq 90^\circ$  gilt:*

### Übungen

6. Von einem Dreieck  $\Delta ABC$  sind die Längen von  $b, c$  und  $\alpha$  bekannt. Sie betragen 6cm, 8cm und  $50^\circ$ . Berechne  $a$  und die Größen der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks !

$$[a = 6.19 \text{ cm}, \beta = 47.97^\circ, \gamma = 82.03^\circ]$$

7. Von einem allgemeinen Dreieck sind bekannt:  $a = 3.5 \text{ cm}$  und  $c = 5.2 \text{ cm}$  und  $\beta = 55^\circ$ . Berechne  $b$  und die fehlenden Winkelgrößen !  
 $[b = 4.29 \text{ cm}, \alpha = 41.93^\circ, \gamma = 83.07^\circ]$
8. Zwei Orte  $A$  und  $B$  liegen auf verschiedenen Seiten eines Sees. Zwei Strassen, die von  $A$  und  $B$  geradlinig ausgehen, treffen sich in  $C$  unter einem Winkel von  $57^\circ$ . Wie weit ist  $A$  von  $B$  entfernt (Luftlinie), wenn die Entfernung von  $B$  bis  $C$   $5.4 \text{ km}$  und die Entfernung von  $A$  bis  $C$   $8.4 \text{ km}$  beträgt ?  $[c \approx 7.09 \text{ km}]$
9. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Cosinussatz und dem Satz des Pythagoras ?
10. Wie lang ist ein Kreisabschnitt in einem Kreis mit  $r = 16 \text{ cm}$ , wenn die zugehörige Sehnenlänge  $s = 23.5 \text{ cm}$  ist ?  
 $[26.39 \text{ cm}]$
11. Gegeben ist ein Dreieck mit  $b = 58 \text{ cm}, c = 98 \text{ cm}$  und  $\alpha = 81^\circ$ . Berechne die Seite  $a$  und den Winkel  $\beta$  !  
 $[a = 105.78 \text{ cm}, \beta = 32.79^\circ]$
12. Gegeben ist ein Parallelogramm mit:  $b = 16.1 \text{ cm}, c = 44.2 \text{ cm}$  und  $\gamma = 99^\circ$ . Berechne die Seiten, Winkel, Diagonalen und den Flächeninhalt !  
 $[a = 44.2 \text{ cm}, d = 16.1 \text{ cm}, \alpha = 99^\circ, \beta = \delta = 81^\circ, e = 49.36 \text{ cm}, f = 44.60 \text{ cm}, 702.78 \text{ cm}^2]$
13. Gegeben ist ein Trapez mit  $a = 41 \text{ cm}, b = 23 \text{ cm}, c = 9,6 \text{ cm}$  und  $\beta = 81^\circ$ . Berechne die fehlenden Seiten und Winkel !  
 $[\gamma = 99^\circ, \alpha \approx 39.25^\circ, \delta \approx 140.75^\circ, d \approx 35.90 \text{ cm}, e \approx 43.76 \text{ cm}, f \approx 26.27 \text{ cm}, A \approx 574.73 \text{ cm}^2]$