

1.7 Gleichungen II

(Thema aus dem Bereich Algebra)

Inhaltsverzeichnis

1	Lösen von Bruchgleichungen - Methode I	2
2	Lösen von Bruchgleichungen - Methode II	3
3	Gleichungen mit Faktoren	5
4	Gleichungen mit Beträgen	6

1 Lösen von Bruchgleichungen - Methode I

Aufgabe:

$$\frac{5x+2}{x-2} - \frac{x-6}{x+6} = 4$$

Ziel: x muss auf alleine auf einer Seite stehen (Wir müssen die Gleichung nach x auflösen).

Problem:

Weg:

Lösung:

$$\frac{5x+2}{x-2} - \frac{x-6}{x+6} = 4$$

! Auf dem Weg zur Lösung multiplizieren wir mit einem Term (z.B. $\cdot(x-2)$). Dies ist aber nicht immer eine Äquivalenzumformung, es kann sein, dass wir Lösungen erhalten, die gar keine sind (Scheinlösungen). Deshalb müssen wir die Lösungen, die wir erhalten, immer durch Einsetzen überprüfen.

1. Bestimme die Lösungen der Gleichungen in **Q**. Gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L} = \{\dots\}$ an.

a) $\frac{3+x}{x-2} = \frac{2x+1}{2x-4}$

b) $\frac{1}{x} + 2 = \frac{9}{x}$

c) $\frac{3(x+2)}{x+8} = \frac{2(x+3)}{x+8}$

d) $\frac{x-7}{x-13} = \frac{x-1}{x+2}$

e) $\frac{x-6}{x} = \frac{x}{x+10}$

2. Bei welchen der untenstehenden Bruchgleichungen ist $x = -2$ eine Lösung ?

a) $\frac{1}{(x+2)(x-3)} = \frac{1}{(x+2)(x+4)}$

b) $\frac{x-4}{14+x} = \frac{x-2}{x+10}$

3. Bei der untenstehenden Bruchgleichung geraten wir in eine Sackgasse, wenn wir mit der bisher gelernten Methode verfahren. Gibt es einen anderen Weg, der es uns ermöglicht, Gleichung zu lösen ? Probiere Deine Idee aus ! Die Lösung der Gleichung lautet $x = -5/3$

$$\frac{2x+19}{x+2} = \frac{47}{3x+6} \quad | \cdot (x+2)$$

$$2x+19 = \frac{47(x+2)}{3x+6} \quad | \cdot (3x+6)$$

$$(2x+19)(3x+6) = 47(x+2)$$

$$6x^2 + 12x + 57x + 54 = 47x + 94$$

$$6x^2 + 69x + 54 = 47x + 94$$

$$6x^2 + 22x = 40$$

2 Lösen von Bruchgleichungen - Methode II

Bei der letzten Übungsaufgabe haben wir gesehen, dass die Multiplikationsmethode in eine Sackgasse führen kann. Aus diesem Grunde lernen wir eine 2. Methode zum Lösen von Bruchgleichungen kennen. Sie wird am einfachsten an einem Beispiel erklärt:

Beispiel

$$\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{2x+8}{x^2-4}$$

4. Bestimme die Lösung der folgenden Gleichungen in \mathbb{Q} .

$$\text{a) } \frac{x-7}{6x+6} = \frac{x+7}{8x+8}$$

$$\text{b) } \frac{x-2}{x^2-x} = \frac{x}{x^2-1}$$

$$\text{c) } \frac{x-1}{x+1} - \frac{2x-1}{2x+2} = \frac{4x-1}{4x+4}$$

$$\text{d) } \frac{z-3}{z-2} + \frac{z}{5z-10} = \frac{4}{5}$$

$$\text{e) } \frac{x+3}{x-2} - \frac{x+2}{x-3} = \frac{x-5}{x^2-5x+6}$$

$$\text{f) } \frac{5}{2t^2+3t} + \frac{6}{2t+3} - \frac{7}{t} = 0$$

5. Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen in \mathbb{Q} .

$$\text{a) } \frac{1-\frac{2}{x}}{2+\frac{2}{x}} - \frac{1-\frac{3}{x}}{3+\frac{3}{x}} = \frac{1-\frac{4}{x}}{4+\frac{4}{x}}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{1}{4}x+1}{1-\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{3}{2}}{2-x} = \frac{1}{4}$$

$$\text{c) } \frac{1}{1+\frac{1}{w}} = \frac{1+\frac{1}{w}}{1-\frac{1}{w}}$$

6. Löse die folgenden Bruchgleichungen jeweils nach allen Variablen auf.

$$\text{a) } \frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

$$\text{b) } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\text{c) } \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\text{d) } C = 4\pi\epsilon \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right)}$$

7. (Zusatzaufgaben) Löse jeweils nach allen Variablen auf.

$$\text{a) } u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$$

$$\text{b) } t' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \left(t - \frac{v}{c^2}x \right)$$

3 Gleichungen mit Faktoren

Gleichungen mit Faktoren, deren Produkt 0 ist, lassen sich besonders einfach lösen. Zur Repetition der Begriffe Faktoren und Produkt:

$$3 \cdot 4 = 12$$

$$a \cdot b = 0$$

Es gilt folgender Satz (der Pfeil \Rightarrow bedeutet: „daraus folgt“):

Satz 1 Wenn beim Produkt $a \cdot b$ mindestens ein Faktor 0 ist, dann hat das Produkt den Wert 0, d.h.

$$a = 0 \text{ oder } b = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0$$

Beispiele

- $3 \cdot 0 = 0$
- $0 \cdot 4 = 0$
- $3 \cdot 0 \cdot (8 - x)(25 + x^3) = 0$
- $2^{100} \cdot 0 \cdot 9z = 0$

Es gilt auch die Umkehrung des Satzes.

Satz 2 Wenn das Produkt $a \cdot b$ den Wert 0 hat, dann ist mindestens ein Faktor 0, d.h.

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ oder } b = 0$$

Beispiel

- $(x - 1)(x - 3) = 0$

Lösung der Gleichung:

- Die Faktoren sind hier $(x - 1)$ und $(x - 3)$
- Nach dem obigen Satz gilt nun: $x - 1 = 0$ oder $x - 3 = 0$
- $x - 1 = 0 \Rightarrow \underline{x = 1}$
- $x - 3 = 0 \Rightarrow \underline{x = 3}$
- $\mathbf{L} = \{1, 3\}$

Übungen

8. Finde die Lösung(en) der folgenden Gleichungen in \mathbf{Q} .

a) $7777(2x - 37) = 0$

b) $1234(444 - 10x) = 0$

c) $x(12x + 96) = 0$

d) $35x(7x + 91) = 0$

9. Finde die Lösung(en) der folgenden Gleichungen in \mathbf{Q} .

a) $(x - 6)(2x + 9) = 0$

b) $(5x - 2)(4x + 3) = 0$

c) $(120 - 8x)(12 + 8x) = 0$

e) $x(x - 9)(2x + 13)(3x - 15) = 0$

g) $(4x + 3 + 7x)(15 - 7x - 1) = 0$

d) $(x + 2.5)(5x - 2) = 0$

f) $(5x + 7)(6x - 90)(9x + 60) = 0$

h) $x(3x + 17 - 20x)(25 + 7x + 3) = 0$

10. Finde die Lösung(en) der folgenden Gleichungen in \mathbf{Q} .

a) $x^2 + 4x + 4 = 0$

c) $x^2 - 9 = 0$

e) $x^2 - 5x + 6 = 0$

g) $x^2 - x - 20 = 0$

i) $x^2 - 2x = 63$

b) $x^2 + 9x + 20 = 0$

d) $x^2 - 2x + 1$

f) $x^2 - 9x + 20 = 0$

h) $x^2 - 5x - 24 = 0$

j) $x^2 = 5x + 14$

4 Gleichungen mit Beträgen

Das Betragszeichen haben wir schon kennengelernt:

- $|3| = 3$
- $|-3| = 3$

Wenn wir in den Ausdruck $|x|$ eine positive Zahl einsetzen, dann können wir das Betragszeichen weglassen:

$$|x| = x \quad (\text{für } x \geq 0)$$

Wenn wir in den Ausdruck $|x|$ eine negative Zahl einsetzen, dann können wir das Betragszeichen weglassen, wenn wir ein Minuszeichen vor die Zahl setzen:

$$|x| = -x \quad (\text{für } x < 0)$$

Aufgabe: Finde die Lösung(en) der folgenden Gleichung in \mathbf{Q} .

$$6|x| - 20 = x + 29$$

11. Finde die Lösung(en) der folgenden Gleichung in \mathbf{Q} .

a) $|x| = 4$

d) $x + 3|x| = 50$

g) $5(|x| - 8) = 3(x + 16)$

b) $0.5x + 6 = |x|$

e) $8x + 7 = 2|x|$

h) $(|x| - 3)(|x| + 2) = 0$

c) $|x| = x + 9$

f) $4|x| + 15 = x$

i) $(x - |x|)(5 - |x|) = 0$