

1.6 Bruchterme

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie	2
1.1 Lernziele	2
1.2 Repetition	2
1.3 Die Addition von zwei Bruchtermen-Methode I	3
1.4 Doppelbrüche	4
1.5 Die Addition von zwei Bruchtermen mit komplizierterem Nenner	5
1.6 Die Addition von zwei Bruchtermen - Methode II	5
1.6.1 Das kgV	5
1.6.2 Lösung der Aufgabe mit dem kgV	6
1.7 Zusammenfassung	7

Bruchterme

1 Theorie

1.1 Lernziele

1. Ich weiss, welche Bedingung erfüllt sein muss, damit ich zwei Bruchterme addieren kann.
→
2. Ich kenne zwei Methoden, um Brüche gleichnennrig zu machen und kenne deren Vor- und Nachteile.
→

3. Ich weiss, wann ich welche Methode mit Vorteil einsetze.
→

1.2 Repetition

Terme haben wir ganz am Anfang des Semesters kennengelernt. Sie sind zusammengesetzt aus Zahlen, Variablen, Klammern und Bruchstrichen.

Achtung: In Termen dürfen nie Gleichheits- und Ungleichheitszeichen vorkommen !

Beispiele

Diejenigen Terme, die einen (oder mehrere) Bruchstrich(e) haben, nennen wir **Bruchterme**.

Beispiele von Bruchtermen

1.3 Die Addition von zwei Bruchtermen-Methode I

Wir wollen folgende Aufgabe lösen:

$$\frac{4x+1}{2x+1} + \frac{4x+1}{2x-1} = ?$$

Frage:

Antwort:

Frage:

Antwort:

Beispiel

$$\frac{4x+1}{2x+1} + \frac{4x+1}{2x-1} = ?$$

Lösung

1.4 Doppelbrüche

Doppelbrüche mit Zahlen haben wir bereits in der Unterstufe kennengelernt. Bei Doppelbrüchen haben die verschiedenen Bruchstriche verschiedene Prioritäten. Damit der Doppelbruch eindeutig ist, muss der **Hauptbruchstrich** gekennzeichnet sein, meistens ist er die längste Linie, in diesem Skript ist er die **dickste Linie**

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}} =$$

Merke: Bei Doppelbrüchen werden die äusseren und die inneren Glieder miteinander multipliziert.

Aufgabe: Forme den folgenden Bruch zu einem Bruch mit einem Bruchstrich um.

$$\frac{\frac{2a+4}{a^2}}{\frac{3a+6}{2a^3}}$$

Wenn wir wissen, wie wir einen Doppelbruch mit Zahlen lösen müssen, dann können wir auch ohne Probleme einen Doppelbruch mit Variablen lösen:

Bei der nächsten Aufgabe kommt eine zusätzliche Schwierigkeit dazu. Bis jetzt hatten wir oberhalb des Hauptbruchstriches (dicker Bruchstrich) und unterhalb des Bruchstriches schöne Brüche. In der folgenden Situation ist das nicht mehr so. Oberhalb des Bruchstriches haben wir eine **Summe** von Brüchen. Die Aufgabe sieht so aus:

$$\frac{\frac{5}{x+a} - \frac{7}{x-a}}{\frac{2}{x^2-a^2}}$$

Die Lösung ist nicht viel schwieriger als beim vorherigen Beispiel. Wir müssen einfach zuerst die beiden Brüche zusammenzählen, danach befinden wir uns in der bekannten Situation des oberen Beispiels.

1.5 Die Addition von zwei Bruchtermen mit komplizierterem Nenner

Wir betrachten nun eine Aufgabe mit komplizierteren Nennern.

$$\frac{4x+1}{(2x+1)(3x+2)} + \frac{4x+1}{(2x+1)(x+3)}$$

Lösung

$$\begin{aligned} \frac{4x+1}{(2x+1)(3x+2)} + \frac{4x+1}{(2x+1)(x+3)} &= \frac{4x+1}{(2x+1)(3x+2)} \frac{(2x+1)(x+3)}{(2x+1)(x+3)} + \frac{4x+1}{(2x+1)(x+3)} \frac{(2x+1)(3x+2)}{(2x+1)(3x+2)} \\ &= \frac{(4x+1)(2x+1)(x+3) + (4x+1)(2x+1)(3x+2)}{(2x+1)(3x+2)(2x+1)(x+3)} \end{aligned}$$

Mit der Multiplikationsmethode erhalten wir einen sehr grossen Ausdruck der zur Vereinfachung viele Schritte erfordert. Es stellt sich deshalb die Frage, ob es nicht eine einfachere Methode gibt, um Brüche miteinander zu addieren.

1.6 Die Addition von zwei Bruchtermen - Methode II

1.6.1 Das kgV

Bei dieser Methode geht es um das kleinste gemeinsame Vielfache. Dieses ist folgendermassen definiert:

Definition 1 Gegeben sind die Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$. Das kleinste natürliche Zahl, von der a und b Teiler sind, nennen wir *kleinstes gemeinsames Vielfaches* von a und b , abgekürzt $\text{kgV}(a, b)$.

Beispiel:

- $\text{kgV}(3, 5) =$
- $\text{kgV}(4, 6) =$

Bei grösseren Zahlen können wir das kgV bekanntlich mit Hilfe der Primzahlzerlegung bestimmen (wenn es ohne TR geschehen soll). Wir betrachten dieses Verfahren hier, weil wir dieses Prinzip nachher auch auf Terme mit Variablen übertragen können.

Das $\text{kgV}(24, 54)$ bestimmen:

Die Anwendung auf das Bruchrechnen:

$$\frac{5}{24} + \frac{7}{54} = ?$$

Frage:

Antwort:

Beispiele:

1. Bestimme das kgV der Terme a, b, a^2, b^3 und c^2 .
2. Bestimme das kgV der Terme $2x^2, 3y$ und $4x$.
3. Bestimme das kgV der Terme $(x+1)(x+2), (x+1)^2(x+2)$ und $(x+1)(x+3)^2$.
4. Bestimme das kgV der Terme $3x(x+1)(x+2), 2x^2y(x+1)^2(x+2)$ und $6y^2(x+1)(x+3)^2$.
5. Bestimme das kgV der Terme $x+y, x-y$ und $x+y+z$

1.6.2 Lösung der Aufgabe mit dem kgV

Lösen wir die Aufgabe aus Abschnitt 1.4 nun mit der Methode des kgV:

$$\frac{4x+1}{(2x+1)(3x+2)} + \frac{4x+1}{(2x+1)(x+3)}$$

Diese Methode funktioniert natürlich auch für Aufgaben mit mehr als zwei Bruchtermen.

1.7 Zusammenfassung

- Wir standen vor dem Problem, dass wir Brüche addieren mussten, die nicht den gleichen Nenner hatten.
- Wir haben uns gefragt, wie wir gleiche Nenner erhalten können.
- Wir haben herausgefunden, dass die Nenner dann gleich werden, wenn wir sie miteinander multiplizieren.
- Die Methode war leider nur bei einfachen Nennern erfolgreich. Bei Brüchen mit grossen Nennern hatten wir das Problem, dass die Zähler sehr gross wurden.
- Aus diesem Grunde mussten wir uns eine zweite Methode überlegen. Wir kamen auf die Idee, das kgV zu nehmen, wodurch sich die Rechnungen erheblich vereinfachten.
- Wir haben uns die Frage gestellt: Welche Methode wird wann am besten angewandt? Wir fanden heraus: Methode II, wenn die Nenner Gemeinsamkeiten aufweisen, sonst die Methode I. Die Methode I hat den grossen Vorteil, dass sie nur eine Überlegung braucht und deshalb sehr leicht zu merken ist.

Übungen

1. Berechne die folgenden Ausdrücke !

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} =$

b) $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} =$

c) $\frac{4}{5} - \frac{1}{3} =$

d) $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} =$

2. Berechne die folgenden Ausdrücke !

a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} =$

b) $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} =$

c) $\frac{3}{5} : \frac{1}{2} =$

d) $\frac{2}{5} : \frac{1}{4} =$

3. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

a) $\frac{14ab}{5a^2 - 5b^2} \cdot \frac{10a + 10b}{7ab^3}$ $\left[\frac{4}{b^2(a-b)} \right]$ b) $\frac{12 - 24y}{16x + 40} \cdot \frac{4x + 10}{4y^2 - 1}$ $\left[-\frac{3}{2y+1} \right]$

c) $\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{2a + 2b}{3b - 3a}$ $\left[-\frac{2}{3} \right]$ d) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x^2 + xy}{(x-y)^2}$ $\left[\frac{x(x+y)}{x-y} \right]$

e) $\frac{x^4 - y^4}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{x - y}{x^2 + xy}$ $\left[\frac{x^2 + y^2}{x} \right]$

4. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

a) $\frac{2x^2 + 4xy + 2y^2}{(3xy)^2} : \frac{x^2 - y^2}{9x^2y}$ $\left[\frac{2(x+y)}{y(x-y)} \right]$ b) $\frac{16u^2 - 9b^2}{24(b+u)} : \frac{4u - 3b}{36(u+b)}$ $\left[\frac{3(4u+3b)}{2} \right]$

c) $\frac{9z^2 + 12w}{12z - 20} : \frac{9z^4 - 16w^2}{18z - 30}$ $\left[\frac{9}{2(3z^2 - 4w)} \right]$ d) $\frac{c^2 - d^2}{c^2 - 4c + 3} : \frac{(d-c)^2}{c-3}$ $\left[-\frac{c+d}{(c-1)(d-c)} \right]$

5. Mache bei den folgenden Aufgaben die Brüche gleichnamig.

a) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$

b) $\frac{7}{t-1} + \frac{6}{1-t}$

6. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

a) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}$ $\left[\frac{4ab}{(a+b)(a-b)} \right]$ b) $\frac{7}{t-1} + \frac{6}{1-t}$ $\left[\frac{1}{t-1} \right]$

c) $x - \frac{x^2 - 2}{x - 2}$ $\left[-\frac{2(x-1)}{x-2} \right]$ d) $\frac{k-l}{4k+4l} + \frac{k+4l}{6k+6l}$ $\left[\frac{5}{12} \right]$

7. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

a) $\left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b} \right) : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$ $\left[-b-a \right]$ b) $\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)$ $\left[\frac{n+m}{n-m} \right]$

8. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

$$a) \frac{a^2 + ab}{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} \right) \quad \left[\frac{a(a+b)}{a^2+b^2} \right] \quad b) \left(a - \frac{a}{a+1} \right) \left(1 - \frac{1}{a^2} \right) \quad [a-1]$$

$$c) \frac{45a}{a^2 - b^2} : \left(\frac{7a}{a+b} + \frac{a}{2a+2b} \right) \quad \left[\frac{6}{a-b} \right]$$

$$d) \left(\frac{2o+4s}{3o-5s} - \frac{2o-4s}{3o+5s} \right) : \frac{o^2 - 4s^2}{9o^2 - 25s^2} \quad \left[\frac{44os}{(o+2s)(s-2s)} \right]$$

9. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

$$a) \frac{\frac{5}{x+a} - \frac{7}{x-a}}{2} \quad [-x-6a] \quad b) \frac{\frac{a}{a^2-1}}{\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a-1}} \quad \left[-\frac{a}{2} \right]$$

10. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

$$a) \frac{4a-8b}{\frac{a^2-4b^2}{5}} \quad \left[\frac{20}{a+2b} \right] \quad b) \frac{\frac{x^2+a^2}{a-x} - \frac{x}{a+x}}{a-x} \quad [a^2-x^2] \quad c) \frac{a}{1 + \frac{1}{a+1}} \quad \left[\frac{a(a+1)}{a+2} \right]$$

11. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

$$a) \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} \quad \left[\frac{x}{x+1} \right] \quad b) \frac{\frac{2a}{a-3} - \frac{a}{a+4}}{a+11} \quad [a]$$

$$c) \frac{\frac{r+s}{r-s} - \frac{r-s}{r+s}}{1 - \frac{r^2+s^2}{r^2-s^2}} \quad \left[-\frac{2r}{s} \right] \quad d) \frac{\frac{a}{c} - \frac{a+ab}{a+c}}{6a^2 - 12abc + 6b^2c^2} \quad \left[\frac{a}{6c(a+c)(a-bc)} \right]$$

12. Bestimme das kgV der folgenden Zahlen mit Hilfe der Primzahlzerlegung.

$$a) 35 \text{ und } 105 \quad b) 12, 15 \text{ und } 25$$

13. Mache die folgenden Brüche mit Hilfe der Primzahlzerlegung gleichnamig:

$$a) \frac{2}{35} \text{ und } \frac{11}{105} \quad b) \frac{1}{12}, \frac{4}{15} \text{ und } \frac{7}{25}$$

14. Unterstreiche gleiche Ausdrücke mit der gleichen Farbe.

$$a) a^5, (x+1), (x+2)^2, a-1, (a-1)^4, a, (a+b)^2$$

$$b) (x+3)(x+5), (x+2)(x+4)^3(x+5)^2 \text{ und } (x+3)^2(x+4)(x+5)^3$$

$$c) 2(a+b)(a-b)(a+c)^2, 3(a+b)(a-b)^3, (a+b)^2 \text{ und } 5(a+b)^2(a-b)(a+c)$$

$$d) a+b+c, a+b \text{ und } b+c$$

15. Bestimme das kgV der folgenden Terme:

$$a) 2, 3, 5 \text{ und } 6$$

$$b) x, y, z^2, x^2 \text{ und } z^3$$

- c) $3x, 4z^2, 5y^2$ und $2y^3$
 d) $(x+1), (x+2)^2$ und $(x+1)^2(x+2)$
 e) $3(x+3)(x+5), 2(x+2)(x+5)^2$ und $4(x+3)^2(x+4)$
 f) $a+b, a-b$ und $a+b+c$
16. Bestimme das kgV der folgenden Terme, indem Du zuerst faktorisierst:
- a) $s^2 - 4$ und $2 - s$
 b) $u - v, v - u$ und $u + v$
 c) $z^2 - z, z^2$ und $z^2 + z$
17. Mache die Brüche gleichnamig. Dabei sollte der Nenner so klein (im Sinne des kgV) wie möglich sein.
- a) $\frac{s+7}{3s-6} - \frac{s+4}{s^2-2s}$ b) $\frac{u}{uv+v^2} - \frac{v}{u^2+uv}$
 c) $\frac{1}{z^2-z} - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2+z}$ d) $\frac{2x-1}{x-3} - \frac{2x(x+2)}{x^2-9} - \frac{2}{3x}$
18. Beachte, dass die Aufgaben zum Teil oben schon vorgekommen sind. Fasse nun so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.
- a) $\frac{s+7}{3s-6} - \frac{s+4}{s^2-2s}$ $\left[\frac{s+6}{3s}\right]$ b) $\frac{u}{uv+v^2} - \frac{v}{u^2+uv}$ $\left[\frac{u-v}{vu}\right]$
 c) $\frac{1}{z^2-z} - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2+z}$ $\left[\frac{2}{z^2(z-1)(z+1)}\right]$ d) $\frac{2x-1}{x-3} - \frac{2x(x+2)}{x^2-9} - \frac{2}{3x}$ $\left[\frac{x-6}{3x(x+3)}\right]$
 e) $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$ $[0]$
 f) $\frac{u}{u-v} + \frac{v}{v-u} - \frac{u+v-1}{u+v}$ $\left[\frac{1}{u+v}\right]$