Lösungen

1. Berechne die folgenden Ausdrücke !

a) $\underline{\underline{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\underline{\underline{\frac{7}{12}}}$

b) $\underline{\underline{\frac{2}{3}+\frac{3}{5}}}=\frac{10}{15}+\frac{9}{15}=\underline{\underline{\frac{19}{15}}}$

c) $\underline{\underline{\frac{4}{5}-\frac{1}{3}}}=\frac{12}{15}-\frac{5}{15}=\underline{\underline{\frac{7}{15}}}$

d) $\underline{\underline{\frac{3}{5}-\frac{1}{2}}}=\frac{6}{10}-\frac{5}{10}=\underline{\underline{\frac{1}{10}}}$

2. Berechne die folgenden Ausdrücke !

a) $\underline{\underline{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}}}=\underline{\underline{\frac{3}{10}}}$

b) $\underline{\underline{\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}}}=\underline{\underline{\frac{2}{15}}}$

c) $\underline{\underline{\frac{3}{5}:\frac{1}{2}}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{1}=\underline{\underline{\frac{6}{5}}}$

d) $\underline{\underline{\frac{2}{5}:\frac{1}{4}}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{1}=\underline{\underline{\frac{8}{5}}}$

3. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

a) $$\underline{\underline{\frac{14ab}{5a^2-5b^2}\cdot\frac{10a+10b}{7ab^3}}}=\frac{14ab(10a+10b)}{(5a^2-5b^2)7ab^3}=\frac{2\cdot 10(a+b)}{5(a^2-b^2)b^2}=\frac{4(a+b)}{(a+b)(a-b)b^2}=\underline{\underline{\frac{4}{(a-b)\cdot b^2}}}$$

b) $$\underline{\underline{\frac{12-24y}{16x+40}\cdot\frac{4x+10}{4y^2-1}}}=\frac{(12-24y)(4x+10)}{(16x+40)(4y^2-1)}=\frac{12(1-2y)2(2x+5)}{8(2x+5)(2y+1)(2y-1)}$$
$$=\frac{3(1-2y)}{(2y+1)(2y-1)}=\frac{3(1-2y)}{-(2y+1)(1-2y)}$$
$$=\frac{3}{-(2y+1)}=\underline{\underline{-\frac{3}{2y+1}}}$$

c) $$\underline{\underline{\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{2a+2b}{3b-3a}}}=\frac{(a^2-b^2)(2a+2b)}{(a+b)^2(3b-3a)}=\frac{(a+b)(a-b)2(a+b)}{(a+b)^2\cdot 3(b-a)}$$
$$=\frac{2(a-b)}{3(b-a)}=\frac{2(a-b)}{-3(a-b)}=\underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$$

d) $$\underline{\underline{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^3+xy^2}{(x-y)^2}}}=\frac{(x^2-y^2)(x^3+xy^2)}{(x^2+y^2)(x-y)^2}=\frac{(x+y)(x-y)x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)(x-y)^2}=\underline{\underline{\frac{(x+y)x}{(x-y)}}}$$

e) $$\underline{\underline{\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{x-y}{x^2+xy}}}=\frac{(x^4-y^4)(x-y)}{(x^2-2xy+y^2)(x^2+xy)}=\frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)(x-y)}{(x-y)^2x(x+y)}$$
$$=\frac{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}{(x-y)x(x+y)}=\underline{\underline{\frac{x^2+y^2}{x}}}$$

4. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

a) $$\underline{\underline{\frac{2x^2+4xy+2y^2}{(3xy)^2}:\frac{x^2-y^2}{9x^2y}}}=\frac{2x^2+4xy+2y^2}{(3xy)^2}\cdot\frac{9x^2y}{x^2-y^2}=\frac{(2x^2+4xy+2y^2)(9x^2y)}{(3xy)^2(x^2-y^2)}$$
$$=\frac{2(x^2+2xy+y^2)9x^2y}{9x^2y^2(x+y)(x-y)}=\frac{2(x^2+2xy+y^2)}{y(x+y)(x-y)}$$
$$=\frac{2(x+y)^2}{y(x+y)(x-y)}=\underline{\underline{\frac{2(x+y)}{y(x-y)}}}$$

b) $$\underline{\underline{\frac{16u^2-9b^2}{24(b+u)}:\frac{4u-3b}{36(u+b)}}} = \frac{16u^2-9b^2}{24(b+u)}\cdot\frac{36(u+b)}{4u-3b} = \frac{(16u^2-9b^2)36(u+b)}{24(b+u)(4u-3b)}$$
$$= \frac{(4u+3b)(4u-3b)36(u+b)}{24(b+u)(4u-3b)} = \underline{\underline{\frac{3(4u+3b)}{2}}}$$

c) $$\underline{\underline{\frac{9z^2+12w}{12z-20}:\frac{9z^4-16w^2}{18z-30}}} = \frac{9z^2+12w}{12z-20}\cdot\frac{18z-30}{9z^4-16w^2} = \frac{(9z^2+12w)(18z-30)}{(12z-20)(9z^4-16w^2)}$$
$$= \frac{3(3z^2+4w)6(3z-5)}{4(3z-5)(3z^2+4w)(3z^2-4w)} = \underline{\underline{\frac{9}{2(3z^2-4w)}}}$$

d) $$\underline{\underline{\frac{c^2-d^2}{c^2-4c+3}:\frac{(d-c)^2}{c-3}}} = \frac{c^2-d^2}{c^2-4c+3}\cdot\frac{c-3}{(d-c)^2} = \frac{(c^2-d^2)(c-3)}{(c^2-4c+3)(d-c)^2}$$
$$= \frac{(c+d)(c-d)(c-3)}{(c-3)(c-1)(d-c)^2} = \frac{(c+d)(c-d)}{(c-1)(d-c)^2}$$
$$= \frac{-(c+d)(d-c)}{(c-1)(d-c)^2} = \frac{-(c+d)}{(c-1)(d-c)} = \underline{\underline{-\frac{(c+d)}{(c-1)(d-c)}}}$$

5. Mache bei den folgenden Aufgaben die Brüche gleichnamig.

a) $\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}$ s.Aufgabe 6(a) b) $\frac{7}{t-1}+\frac{6}{1-t}$ s.Aufgabe 6(b)

6. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

a) $$\underline{\underline{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}} = \frac{(a+b)(a+b)}{(a-b)(a+b)}-\frac{(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a+b)(a+b)-(a-b)(a-b)}{(a-b)(a+b)}$$
$$= \frac{a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)}{(a-b)(a+b)} = \frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{(a-b)(a+b)}$$
$$= \frac{2ab+2ab}{(a-b)(a+b)} = \underline{\underline{\frac{4ab}{(a-b)(a+b)}}}$$

b) $$\underline{\underline{\frac{7}{t-1}+\frac{6}{1-t}}} = \frac{7(1-t)}{(t-1)(1-t)}+\frac{6(t-1)}{(1-t)(t-1)} = \frac{7(1-t)+6(t-1)}{(t-1)(1-t)}$$
$$= \frac{7-7t+6t-6}{(t-1)(1-t)} = \frac{1-t}{(t-1)(1-t)} = \underline{\underline{\frac{1}{t-1}}}$$

c) $$\underline{\underline{x-\frac{x^2-2}{x-2}}} = \frac{x}{1}-\frac{x^2-2}{x-2} = \frac{x(x-2)}{x-2}-\frac{x^2-2}{x-2}$$
$$= \frac{x(x-2)-(x^2-2)}{x-2} = \frac{x^2-2x-x^2+2}{x-2} = \underline{\underline{\frac{-2x+2}{x-2}}}$$

d) $$\underline{\underline{\frac{k-l}{4k+4l}+\frac{k+4l}{6k+6l}}} = \frac{(k-l)(6k+6l)}{(4k+4l)(6k+6l)}+\frac{(k+4l)(4k+4l)}{(6k+6l)(4k+4l)}$$
$$= \frac{(k-l)(6k+6l)+(k+4l)(4k+4l)}{(4k+4l)(6k+6l)}$$
$$= \frac{6k^2+6kl-6kl-6l^2+4k^2+4kl+16kl+16l^2}{(4k+4l)(6k+6l)}$$
$$= \frac{10k^2+10l^2+20kl}{(4k+4l)(6k+6l)} = \frac{10(k^2+l^2+2kl)}{(4k+4l)(6k+6l)}$$
$$= \frac{10(k+l)^2}{4(k+l)6(k+l)} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}}$$

7. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

a)
$$\underline{\underline{\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right):\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}} = \left(\frac{b^2}{ab}-\frac{a^2}{ab}\right):\left(\frac{a}{ab}-\frac{b}{ab}\right) = \left(\frac{b^2-a^2}{ab}\right):\left(\frac{a-b}{ab}\right)$$
$$= \left(\frac{b^2-a^2}{ab}\right)\cdot\left(\frac{ab}{a-b}\right) = \frac{(b-a)(b+a)}{a-b}$$
$$= \frac{-(a-b)(b+a)}{a-b} = -(b+a) = \underline{\underline{-b-a}}$$

b)
$$\underline{\underline{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right):\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)}} = \left(\frac{n}{mn}+\frac{m}{mn}\right):\left(\frac{n}{mn}-\frac{m}{mn}\right) = \left(\frac{n+m}{mn}\right):\left(\frac{n-m}{mn}\right)$$
$$= \left(\frac{n+m}{mn}\right)\cdot\left(\frac{mn}{n-m}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{n+m}{n-m}\right)}}$$

8. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

a)
$$\underline{\underline{\frac{a^2+ab}{a^2+b^2}\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)}} = \frac{a^2+ab}{a^2+b^2}\left(\frac{a(a+b)}{(a+b)(a-b)}-\frac{b(a-b)}{(a+b)(a-b)}\right)$$
$$= \frac{a^2+ab}{a^2+b^2}\left(\frac{a(a+b)-b(a-b)}{(a+b)(a-b)}\right)$$
$$= \frac{a^2+ab}{a^2+b^2}\left(\frac{a^2+ab-ba+b^2}{(a+b)(a-b)}\right)$$
$$= \frac{a^2+ab}{a^2+b^2}\left(\frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)}\right)$$
$$= \frac{(a^2+ab)(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)} = \frac{a(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \underline{\underline{\frac{a}{a-b}}}$$

b)
$$\underline{\underline{\left(a-\frac{a}{a+1}\right)\left(1-\frac{1}{a^2}\right)}} = \left(\frac{a(a+1)}{a+1}-\frac{a}{a+1}\right)\left(\frac{a^2}{a^2}-\frac{1}{a^2}\right)$$
$$= \left(\frac{a(a+1)-a}{a+1}\right)\left(\frac{a^2-1}{a^2}\right)$$
$$= \frac{a^2+a-a}{a+1}\left(\frac{a^2-1}{a^2}\right)$$
$$= \frac{a^2}{a+1}\left(\frac{a^2-1}{a^2}\right) = \frac{a^2(a+1)(a-1)}{(a+1)a^2} = \underline{\underline{a-1}}$$

c)
$$\underline{\underline{\frac{45a}{a^2-b^2}:\left(\frac{7a}{a+b}+\frac{a}{2a+2b}\right)}} = \frac{45a}{a^2-b^2}:\left(\frac{7a(2a+2b)+a(a+b)}{(a+b)(2a+2b)}\right)$$
$$= \frac{45a}{a^2-b^2}:\left(\frac{14a^2+14ab+a^2+ab)}{(a+b)(2a+2b)}\right)$$
$$= \frac{45a}{a^2-b^2}:\left(\frac{15a^2+15ab}{(a+b)(2a+2b)}\right)$$
$$= \frac{45a}{a^2-b^2}\cdot\frac{(a+b)(2a+2b)}{15a^2+15ab}$$
$$= \frac{45a(a+b)(2a+2b)}{(a^2-b^2)(15a^2+15ab)}$$
$$= \frac{45a(a+b)2(a+b)}{(a+b)(a-b)15a(a+b)} = \underline{\underline{\frac{6}{(a-b)}}}$$

d)
$$\underline{\underline{\left(\frac{2o+4s}{3o-5s}-\frac{2o-4s}{3o+5s}\right):\frac{o^2-4s^2}{9o^2-25s^2}}}$$
$$= \left(\frac{(2o+4s)(3o+5s)-(2o-4s)(3o-5s)}{(3o-5s)(3o+5s)}\right):\frac{o^2-4s^2}{9o^2-25s^2}$$
$$= \left(\frac{6o^2+22os+20s^2-(6o^2-22os+20s^2)}{(3o-5s)(3o+5s)}\right):\frac{o^2-4s^2}{9o^2-25s^2}$$
$$= \left(\frac{6o^2+22os+20s^2-6o^2+22os-20s^2}{(3o-5s)(3o+5s)}\right):\frac{o^2-4s^2}{9o^2-25s^2}$$
$$= \frac{44os}{(3o-5s)(3o+5s)}\cdot\frac{9o^2-25s^2}{o^2-4s^2}$$
$$= \frac{44os(3o+5s)(3o-5s)}{(3o-5s)(3o+5s)(o+2s)(o-2s)} = \underline{\underline{\frac{44os}{(o+2s)(o-2s)}}}$$

9. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

a)
$$\underline{\underline{\frac{\frac{5}{x+a}-\frac{7}{x-a}}{\frac{2}{x^2-a^2}}}} = \frac{\frac{5(x-a)}{(x+a)(x-a)}-\frac{7(x+a)}{(x+a)(x-a)}}{\frac{2}{x^2-a^2}} = \frac{\frac{5(x-a)-7(x+a)}{(x+a)(x-a)}}{\frac{2}{x^2-a^2}}$$
$$= \frac{\frac{5x-5a-7x-7a}{(x+a)(x-a)}}{\frac{2}{x^2-a^2}} = \frac{\frac{-2x-12a}{(x+a)(x-a)}}{\frac{2}{x^2-a^2}}$$
$$= \frac{(-2x-12a)(x^2-a^2)}{2(x+a)(x-a)} = \frac{-2(x+6a)(x+a)(x-a)}{2(x+a)(x-a)}$$
$$= -(x+6a) = \underline{\underline{-x-6a}}$$

b)
$$\underline{\underline{\frac{\frac{a}{a^2-1}}{\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}}}} = \frac{\frac{a}{a^2-1}}{\frac{a-1-(a+1)}{(a+1)(a-1)}} = \frac{\frac{a}{(a+1)(a-1)}}{\frac{-2}{(a+1)(a-1)}} = \frac{a(a+1)(a-1)}{-2(a+1)(a-1)} = \underline{\underline{-\frac{a}{2}}}$$

10. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter

gekürzt werden kann.

a) $$\underline{\underline{\frac{\frac{4a-8b}{a^2-4b^2}}{5}}} = \frac{\frac{4a-8b}{a^2-4b^2}}{\frac{5}{1}} = \frac{4a-8b}{5(a^2-4b^2)} = \frac{4(a-2b)}{5(a-2b)(a+2b)} = \underline{\underline{\frac{4}{5(a+2b)}}}$$

b) $$\underline{\underline{\frac{x^2+a^2}{\frac{a}{a-x}-\frac{x}{a+x}}}} = \frac{\frac{x^2+a^2}{1}}{\frac{a(a+x)}{(a-x)(a+x)}-\frac{x(a-x)}{(a+x)(a-x)x}} = \frac{\frac{x^2+a^2}{1}}{\frac{a(a+x)-x(a-x)}{(a-x)(a+x)}}$$

$$= \frac{\frac{x^2+a^2}{1}}{\frac{a^2+ax-ax+x^2}{(a-x)(a+x)}} = \frac{\frac{x^2+a^2}{1}}{\frac{a^2+x^2}{(a-x)(a+x)}}$$

$$= \frac{(x^2+a^2)(a+x)(a-x)}{x^2+a^2} = \underline{\underline{a^2-x^2}}$$

c) $$\underline{\underline{\frac{a}{1+\frac{1}{a+1}}}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{a+1}{a+1}+\frac{1}{a+1}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{a+1+1}{a+1}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{a+2}{a+1}} = \underline{\underline{\frac{a(a+1)}{a+2}}}$$

11. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

a) $$\underline{\underline{\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}}} = \frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x^2-1}{x^2}} = \frac{(x-1)x^2}{x(x^2-1)} = \frac{(x-1)x^2}{x(x+1)(x-1)} = \underline{\underline{\frac{x}{x+1}}}$$

b) $$\underline{\underline{\frac{\frac{2a}{a-3}-\frac{a}{a+4}}{\frac{a+11}{a^2+a-12}}}} = \frac{\frac{2a(a+4)}{(a-3)(a+4)}-\frac{a(a-3)}{(a-3)(a+4)}}{\frac{a+11}{a^2+a-12}} = \frac{\frac{2a(a+4)-a(a-3)}{(a-3)(a+4)}}{\frac{a+11}{a^2+a-12}}$$

$$= \frac{\frac{2a^2+8a-a^2+3a}{(a-3)(a+4)}}{\frac{a+11}{a^2+a-12}} = \frac{\frac{a^2+11a}{(a-3)(a+4)}}{\frac{a+11}{a^2+a-12}}$$

$$= \frac{(a^2+11a)(a^2+a-12)}{(a-3)(a+4)(a+11)} = \frac{a(a+11)(a+4)(a-3)}{(a-3)(a+4)(a+11)} = \underline{\underline{a}}$$

c) $$\underline{\underline{\frac{\frac{r+s}{r-s}-\frac{r-s}{r+s}}{1-\frac{r^2+s^2}{r^2-s^2}}}} = \frac{\frac{(r+s)^2}{(r-s)(r+s)}-\frac{(r-s)^2}{(r+s)(r-s)}}{\frac{r^2-s^2}{r^2-s^2}-\frac{r^2+s^2}{r^2-s^2}} = \frac{\frac{(r+s)^2-(r-s)^2}{(r-s)(r+s)}}{\frac{r^2-s^2-(r^2+s^2)}{r^2-s^2}}$$

$$= \frac{\frac{r^2+2rs+s^2-(r^2-2rs+s^2)}{(r-s)(r+s)}}{\frac{r^2-s^2-r^2-s^2}{r^2-s^2}} = \frac{\frac{r^2+2rs+s^2-r^2+2rs-s^2}{(r-s)(r+s)}}{\frac{-s^2-s^2}{r^2-s^2}}$$

$$= \frac{\frac{4rs}{(r-s)(r+s)}}{\frac{-2s^2}{r^2-s^2}} = \frac{4rs(r^2-s^2)}{-2s^2(r-s)(r+s)}$$

$$= \frac{4rs(r+s)(r-s)}{-2s^2(r-s)(r+s)} = \underline{\underline{-\frac{2r}{s}}}$$

d) $$\underline{\underline{\frac{\frac{a}{c}-\frac{a+ab}{a+c}}{6a^2-12abc+6b^2c^2}}} = \frac{\frac{a(a+c)}{c(a+c)}-\frac{c(a+ab)}{c(a+c)}}{\frac{6a^2-12abc+6b^2c^2}{1}} = \frac{\frac{a(a+c)-c(a+ab)}{c(a+c)}}{\frac{6a^2-12abc+6b^2c^2}{1}}$$

$$= \frac{\frac{a^2+ac-ac-abc}{c(a+c)}}{\frac{6a^2-12abc+6b^2c^2}{1}} = \frac{\frac{a^2-abc}{c(a+c)}}{\frac{6a^2-12abc+6b^2c^2}{1}}$$

$$= \frac{a^2-abc}{c(a+c)(6a^2-12abc+6b^2c^2)} = \frac{a(a-bc)}{c(a+c)6(a^2-2abc+b^2c^2)}$$

$$= \frac{a(a-bc)}{c(a+c)6(a-bc)^2} = \frac{a}{c(a+c)6(a-bc)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{a}{6c(a+c)(a-bc)}}}$$

12. Bestimme das kgV der folgenden Zahlen mit Hilfe der Primzahlzerlegung.

a) 35 und 105

- $35 = 5 \cdot 7$
- $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$
- $\underline{\underline{\text{kgV(35,105)}=3 \cdot 5 \cdot 7}}$

b) 12,15 und 25

- $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$
- $15 = 3 \cdot 5$
- $25 = 5 \cdot 5 = 5^2$
- $\underline{\underline{\text{kgV(12,15,25)}}}=2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = \underline{\underline{300}}$

13. Mache die folgenden Brüche mit Hilfe der Primzahlzerlegung gleichnamig:

a) $\frac{2}{35}$ und $\frac{11}{105}$

- $\frac{2}{35} = \frac{6}{105}, \frac{11}{105}$ bleibt

b) $\frac{1}{12}, \frac{4}{15}$ und $\frac{7}{25}$

- $\frac{1}{12} = \frac{25}{300}, \frac{4}{15} = \frac{80}{300}, \frac{7}{25} = \frac{84}{300}$

14. Unterstreiche gleiche Ausdrücke mit der gleichen Farbe.

a) $\underline{a^5}, \underline{\underline{(x+1)}}, \underline{\underline{(x+2)^2}}, \underline{\underline{\underline{a-1}}}, \underline{\underline{\underline{(a-1)^4}}}, \underline{a}, \underline{\underline{\underline{(a+b)^2}}}$

b) $\underline{(x+3)\underline{(x+5)}}, \underline{\underline{\underline{(x+2)(x+4)^3(x+5)^2}}}$ und $\underline{(x+3)^2\underline{\underline{(x+4)}}(x+5)^3}$

c) $2\underline{(a+b)\underline{\underline{(a-b)(a+c)^2}}}, 3\underline{(a+b)\underline{(a-b)^3}}, (a+b)^2$ und $5\underline{(a+b)^2\underline{(a-b)\underline{\underline{(a+c)}}}}$

d) $\underline{a+b+c}, \underline{\underline{a+b}}$ und $\underline{\underline{\underline{b+c}}}$

15. Bestimme das kgV der folgenden Terme:

a) 2,3,5 und 6

- $6 = 2 \cdot 3$
- $\underline{\underline{\text{kgV(2,3,5,6)}}} = 2 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{\underline{30}}$

b) x, y, z^2, x^2 und $z^3 \rightarrow \text{kgV}(x, y, z^2, x^2) = x^2 \cdot y \cdot z^2$

c) $3x, 4z^2, 5y^2$ und $2y^3$

- kgV der Zahlen: $4 = 2^2 \rightarrow \text{kgV(2,3,4,5)} = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$
- $\text{kgV}(3x, 4z^2, 5y^2, 2y^3) = 60x \cdot z^2 \cdot y^3$

d) $(x+1), (x+2)^2$ und $(x+1)^2(x+2) \rightarrow (x+1)^2(x+2)^2$

e) $3(x+3)(x+5), 2(x+2)(x+5)^2$ und $4(x+3)^2(x+4) \rightarrow 12(x+3)^2(x+5)^2(x+2)(x+4)$

f) $a+b, a-b$ und $a+b+c \rightarrow (a+b)(a-b)(a+b+c)$

16. Bestimme das kgV der folgenden Terme, indem Du zuerst faktorisierst:

a) s^2-4 und $2-s \rightarrow (s+2)(s-2)$ und $2-s \rightarrow (-1)(s+2)(2-s)$ und $(2-s) \rightarrow (-1)(s+2)(2-s)$

b) $u-v, v-u$ und $u+v \rightarrow (u-v), (-1)(u-v)$ und $(u+v) \rightarrow (-1)(u-v)(u+v)$

c) z^2-z, z^2 und $z^2+z \rightarrow z(z-1), z^2$ und $z(z+1) \rightarrow z^2(z-1)(z+1)$

17. Mache die Brüche gleichnamig. Dabei sollte der Nenner so klein (im Sinne des kgV) wie möglich sein.

a) $$\frac{s+7}{3s-6} - \frac{s+4}{s^2-2s} = \frac{s+7}{3(s-2)} - \frac{s+4}{s(s-2)} = \frac{(s+7)s-(s+4)3}{3s(s-2)}$$

b) $$\frac{u}{uv+v^2} - \frac{v}{u^2+uv} = \frac{u}{v(u+v)} - \frac{v}{u(u+v)} = \frac{u^2-v^2}{uv(u+v)}$$

c) $$\frac{1}{z^2-z} - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{z(z-1)} - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z(z+1)} = \frac{z(z+1)-2(z-1)(z+1)+z(z-1)}{z^2(z-1)(z+1)}$$

d) $$\frac{2x-1}{x-3} - \frac{2x(x+2)}{x^2-9} - \frac{2}{3x} = \frac{2x-1}{x-3} - \frac{2x(x+2)}{(x+3)(x-3)} - \frac{2}{3x}$$
$$= \frac{3x(2x-1)(x+3)-2x(x+2)3x-2(x+3)(x-3)}{3x(x-3)(x+3)}$$

18. Beachte, dass die Aufgaben zum Teil oben schon vorgekommen sind. Fasse nun so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Bruchstrich vorkommt und nicht mehr weiter gekürzt werden kann.

a) $$\underline{\underline{\frac{s+7}{3s-6} - \frac{s+4}{s^2-2s}}} = \frac{s+7}{3(s-2)} - \frac{s+4}{s(s-2)} = \frac{(s+7)s-(s+4)3}{3s(s-2)} = \frac{s^2+7s-3s-12}{3s(s-2)}$$
$$= \frac{s^2+4s-12}{3s(s-2)} = \frac{(s+6)(s-2)}{3s(s-2)} = \underline{\underline{\frac{s+6}{3s}}}$$

b) $$\underline{\underline{\frac{u}{uv+v^2}-\frac{v}{u^2+uv}}} = \frac{u}{v(u+v)}-\frac{v}{u(u+v)} = \frac{u^2-v^2}{uv(u+v)} = \frac{(u+v)(u-v)}{uv(u+v)} = \underline{\underline{\frac{u-v}{uv}}}$$

c) $$\underline{\underline{\frac{1}{z^2-z}-\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z^2+z}}} = \frac{1}{z(z-1)}-\frac{2}{z^2}+\frac{1}{z(z+1)}$$
$$= \frac{z(z+1)-2(z-1)(z+1)+z(z-1)}{z^2(z-1)(z+1)}$$
$$= \frac{z^2+z-2(z^2-1)+z^2-z}{z^2(z-1)(z+1)}$$
$$= \frac{z^2+z-2z^2+2+z^2-z}{z^2(z-1)(z+1)} = \underline{\underline{\frac{2}{z^2(z-1)(z+1)}}}$$

d) $$\underline{\underline{\frac{2x-1}{x-3}-\frac{2x(x+2)}{x^2-9}-\frac{2}{3x}}}$$
$$= \frac{2x-1}{x-3}-\frac{2x(x+2)}{(x+3)(x-3)}-\frac{2}{3x}$$
$$= \frac{3x(2x-1)(x+3)-2x(x+2)3x-2(x+3)(x-3)}{3x(x-3)(x+3)}$$
$$= \frac{(6x^2-3x)(x+3)-6x^2(x+2)-2(x^2-9)}{3x(x-3)(x+3)}$$
$$= \frac{6x^3+18x^2-3x^2-9x-6x^3-12x^2-2x^2+18}{3x(x-3)(x+3)}$$
$$= \frac{x^2-9x+18}{3x(x-3)(x+3)} = \frac{(x-6)(x-3)}{3x(x-3)(x+3)} = \underline{\underline{\frac{x-6}{3x(x+3)}}}$$

e) $$\underline{\underline{\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}}}$$
$$= \frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(-1)(a-b)}+\frac{c}{(-1)(a-c)(-1)(b-c)}$$
$$= \frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(-1)(b-c)(a-b)}+\frac{c}{(a-c)(b-c)}$$
$$= \frac{a(-1)(b-c)+b(a-c)+c(a-b)(-1)}{(a-b)(a-c)(-1)(b-c)}$$
$$= \frac{-ab+ac+ba-bc-ca+cb}{(a-b)(a-c)(-1)(b-c)}$$
$$= \frac{0}{(a-b)(a-c)(-1)(b-c)} = \underline{\underline{0}}$$

f) $$\underline{\underline{\frac{u}{u-v}+\frac{v}{v-u}-\frac{u+v-1}{u+v}}}$$
$$= \frac{u}{u-v}+\frac{v}{(-1)(u-v)}-\frac{u+v-1}{u+v}$$
$$= \frac{u(-1)(u+v)+v(u+v)-(u+v-1)(-1)(u-v)}{(-1)(u-v)(u+v)}$$
$$= \frac{-u^2-uv+vu+v^2+u^2-uv+uv-v^2-u+v}{(-1)(u-v)(u+v)}$$
$$= \frac{-u+v}{(-1)(u-v)(u+v)} = \frac{(-1)(u-v)}{(-1)(u-v)(u+v)} = \underline{\underline{\frac{1}{u+v}}}$$