

# 1.5 Gleichungen I

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>allgemeine Gleichungen</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Gleichungen 1.Grades mit einer Unbekannten</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>allgemeingültige und nichterfüllbare Gleichungen</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Einschub: Rechnen mit physikalischen Zeichen</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Auflösen von Gleichungen mit Parametern</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>Gleichungen mit Wurzeln</b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>Gleichungen mit Quadraten</b>	<b>7</b>
<b>8</b>	<b>Gleichungen mit einer Summe im Nenner</b>	<b>8</b>
<b>9</b>	<b>Textaufgaben, die auf eine Gleichung 1.Grades führen</b>	<b>9</b>

## 1 allgemeine Gleichungen

**Definition 1** Werden zwei Terme  $T_1$  und  $T_2$  durch ein Gleichheitszeichen (=) miteinander verbunden, so entsteht eine Gleichung:  $T_1 = T_2$ .

### Beispiele

Wir suchen immer nach der **Lösung** der Gleichung. Was das konkret heisst, werden wir im nächsten Abschnitt sehen.

## 2 Gleichungen 1.Grades mit einer Unbekannten

Wir betrachten zuerst sehr einfache Gleichungen, die wir bereits kennen:

Die folgenden Gleichungen betrachten wir erst zu einem späteren Zeitpunkt:

Wir können bei den oberen drei Gleichungen zwei Dinge beobachten:

Einer solchen Gleichung sagen wir **Gleichung 1.Grades mit einer Unbekannten**

Wir können nun die Definition für eine Gleichung 1.Grades mit einer Unbekannten angeben:

**Definition 2** Eine Gleichung, die sich auf die Form

*bringen lässt, heisst Gleichung 1.Grades mit einer Unbekannten.*

Bei jeder Gleichung müssen wir die **Grundmenge** angeben. In der Grundmenge sind alle Zahlen enthalten, die wir für die Unbekannte einsetzen dürfen. Mögliche Grundmengen mit unserem Wissen sind: **N, Z, Q**.

Wir nehmen nun eine Gleichung 1. Grades:

$$3x = 6$$

**Frage:**

Die Antwort auf die Frage ist einfach: Wir müssen für  $x$  die Zahl 2 einsetzen. Einer Zahl mit dieser Eigenschaft sagen wir **Lösung** der Gleichung. Der Gesamtheit von allen Lösungen sagen wir **Lösungsmenge**. Die Lösung einer Gleichung 1. Grades können wir rechnerisch ermitteln, indem wir nach der **Unbekannten auflösen**. Bei den folgenden Umformungen wird die Lösungsmenge der Gleichung nicht verändert:

Diese Umformungen heissen **Äquivalenzumformungen**, weil die Lösungsmenge der Gleichung nicht verändert wird.

**Beispiel:**

$$97 + 2x - (19x - 15) + 3 = 107 - 7x - (11x - (5 + 3x))$$

Wir lösen die Gleichung auf:

Wir können nun die Frage nach der **allgemeinen Lösung** (d.h. die Lösung der Gleichung  $ax = b$ ) stellen:

- $ax = b$

Wir lösen die Gleichung nach  $x$  auf:

Dies führt uns zu folgendem Satz, den wir aufgrund obenstehender Berechnung nicht mehr beweisen müssen:

**Satz 1** *Die Gleichung 1. Grades  $ax = b$  hat in  $\mathcal{Q}$  die Lösungsmenge*

### 3 allgemeingültige und nichterfüllbare Gleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei besondere Sorten von Gleichungen:

- Gleichungen, die keine Lösung haben.
- Gleichungen, die unendlich viele Lösungen haben.

## Übungen

- Löse die folgenden Gleichungen in der gegebenen Grundmenge ( $\mathbf{N}$ =natürliche Zahlen,  $\mathbf{Z}$ =ganze Zahlen,  $\mathbf{Q}$ =rationale Zahlen) ohne TR. Gib Dein Ergebnis in der Form  $\mathbf{L} = \{\dots\}$  an.
  - $3x = 5, \mathbf{G} = \mathbf{N}$
  - $3x = 5, \mathbf{G} = \mathbf{Z}$
  - $3x = 5, \mathbf{G} = \mathbf{Q}$
  - $3x = -6, \mathbf{G} = \mathbf{N}$
  - $3x = -6, \mathbf{G} = \mathbf{Z}$
  - $3x = -6, \mathbf{G} = \mathbf{Q}$
- Notiere eine Gleichung, die in  $\mathbf{Z}$ , aber nicht in  $\mathbf{N}$  eine Lösung hat.
- Löse die folgenden Gleichungen in  $\mathbf{Q}$  ohne TR. Gib Dein Ergebnis in der Form  $\mathbf{L} = \{\dots\}$  an.
  - $x + 10 = 16$
  - $x - 28 = 12$
  - $13 = x + 13$
  - $x + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
  - $7\frac{1}{3} = 11 + x$
  - $7 = \frac{1}{3}x$
  - $-11 = 0.11x$
  - $0x = 0$
  - $0x = 17$
  - $\frac{1}{x} = 5$
  - $\frac{1}{x+1} = 5$
- Notiere eine Gleichung, welche in  $\mathbf{Q}$  die Lösung  $-3/7$  hat.
- Entscheide, ob eine Gleichung 1.Grades vorliegt. Falls ja, dann bestimme die Parameter  $a$  und  $b$ .
  - $3x + 5 = 4$
  - $3 = 5$
  - $2x^2 - x + 1 = 5$
  - $\frac{1}{x} = 1$
  - $\frac{1}{x} = x$
  - $(x+1)^2 = 1$
- Löse die folgenden Gleichungen in  $\mathbf{Q}$ . Gib Dein Ergebnis in der Form  $\mathbf{L} = \{\dots\}$  an.
  - $14x - 6 + 5x + 15 = 3x + 22 + 13x - 7$  [ $\mathbf{L} = \{2\}$ ]
  - $3x + 30 - (x + 28) = 3x - (2x + 4)$  [ $\mathbf{L} = \{-6\}$ ]
  - $9x - [4x - (4 + x)] = 4x + 8$  [ $\mathbf{L} = \{2\}$ ]
- Löse die folgenden Gleichungen in  $\mathbf{Q}$ . Gib Dein Ergebnis in der Form  $\mathbf{L} = \{\dots\}$  an.
  - $12(x - 1) = 64 - 14(x - 2)$  [ $\mathbf{L} = \{4\}$ ]
  - $9(3x - 11) = 6(9x - 4)$  [ $\mathbf{L} = \{25/9\}$ ]
  - $2[3x + 2(3x - 2)] = 4(4x - 1)$  [ $\mathbf{L} = \{2\}$ ]
  - $\frac{8}{3} \left(6x - \frac{9}{2}\right) - \frac{3}{2} \left(8x + \frac{1}{3}\right) = 4x - \frac{1}{2} - \frac{4}{5} \left(10x - \frac{5}{8}\right) + 3\frac{1}{2}$  [ $\mathbf{L} = \{2\}$ ]
- Löse die folgenden Gleichungen in  $\mathbf{Q}$ . Gib Dein Ergebnis in der Form  $\mathbf{L} = \{\dots\}$  an.
  - $(x - 5)^2 + (x + 2)^2 = (x + 3)^2 + (x - 10)^2$  [ $\mathbf{L} = \{10\}$ ]
  - $(4x + 1)^2 - (4x)^2 - (x - 1)^2 + (x - 10)^2 = 0$  [ $\mathbf{L} = \{10\}$ ]

## 4 Einschub: Rechnen mit physikalischen Zeichen

Im folgenden Abschnitt werden wir viele Gleichungen aus der Physik auflösen. Dort treten die Zeichen oft nicht in der gewohnten Form  $x, y$  oder  $z$  vor, sondern mit sogenannten Indexen (tiefgestellte Zeichen), wie z.B.  $R_1, m_2$ , usw. . Was müssen wir bei solchen „physikalischen Variablen“ beachten ?

- $R_1$  und  $R_2$  können wie  $x$  und  $y$  nicht miteinander verrechnet werden (z.B. ist  $R_1 + R_2 \neq R_3$  oder  $R_1 \cdot R_2 \neq R_2^2$ , usw. .  $R_1 + R_2$  und  $R_1 \cdot R_2$  bleiben einfach so stehen.
- $R_1 + 2R_1 + 4R_1 = 7R_1$ , gleich wie  $x + 2x + 4x = 7x$
- $R_1 \cdot R_1^2 \cdot R_1^4 = R_1^7$ , gleich wie  $x \cdot x^2 \cdot x^4 = x^7$

### Übung

9. Vereinfache soweit wie möglich. Im Schlussresultat dürfen keine Klammern vorkommen.

a)  $a_1 + a_2 + 2a_1 + 3a_2 =$

b)  $a_1a_2 + a_2a_3 + a_1a_3 =$

c)  $2t_1 + t_2 + 3t_2 - t_1 =$

d)  $a_n + a_{n+1} =$

e)  $R(R_1 + R_2) =$

f)  $t_1(m_1t_2 - m_2t_1)$

## 5 Auflösen von Gleichungen mit Parametern

Wir betrachten nun eine Gleichung, wo nebst der Unbekannten noch weitere Variablen vorhanden sind, sogenannte Parameter. Es sollte jeweils gesagt werden, welches die Unbekannte ist und welches die Parameter sind. Dazu folgendes Beispiel (es soll nach  $x$  aufgelöst werden):

$$ay + bx = a - cx$$

### Übungen

10. Löse die folgenden Gleichungen nach  $x$  auf.

a)  $bx + cx = mb + mc$

$[x = m]$

b)  $ay + bx = a - cx$

$[x = \frac{a-ay}{b+c}]$

c)  $4(ax - b) = 2(ax + 2a - bx)$

$[x = 2]$

d)  $(x - 4a)^2 - x(x + b) = b(7x + 16b)$

$[x = 2a - 2b]$

$$e) (5 + 4b)(3x - 6) = (6x - 7)(2b + 10) \quad [x = \frac{8-2b}{9}]$$

$$f) 5[3 - (8x + 1)(6 - 3a)] = 3[40ax - 3(5x - a)] \quad [x = \frac{2a-5}{65}]$$

$$g) (x + a + 1)^2 - (x + a - 1)^2 + 2x - a = 0 \quad [x = -a/2]$$

11. Löse jeweils nach der angegebenen Variable auf.

$$a) y = ax + b, \text{ nach } x \quad [x = \frac{y-b}{a}]$$

$$b) m_1 c_1 (t - t_1) = m_2 c_2 (t_2 - t), \text{ nach } t \quad [t = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}]$$

$$c) l = l_0 (1 + \alpha \Delta t), \text{ nach } \alpha \quad [\alpha = \frac{l-l_0}{l_0 \Delta t}]$$

$$d) a_n - a_1 = d(n - 1), \text{ nach } n \quad [n = \frac{a_n - a_1 + d}{d}]$$

12. Löse jeweils nach der angegebenen Variable auf.

$$a) v = \frac{s}{t}, \text{ nach } s \quad [s = vt] \quad b) a = \frac{v}{t}, \text{ nach } t \quad [t = \frac{v}{a}]$$

## 6 Gleichungen mit Wurzeln

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \text{ nach } \rho$$

### Übung

13. Löse jeweils nach der angegebenen Variable auf.

$$a) T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ nach } l \quad [l = \frac{gT^2}{4\pi^2}] \quad b) T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}, \text{ nach } D \quad [D = \frac{4\pi^2 m}{T^2}]$$

## 7 Gleichungen mit Quadraten

$$F = c \frac{m_1 m_2}{e^2}, \text{ nach } e$$

**Übung**

14. Löse jeweils nach der angegebenen Variable auf.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } a_r = \omega \cdot r^2, \text{ nach } r & [r = \pm \sqrt{\frac{a_r}{\omega}}] \\
 \text{b) } A = \pi r^2, \text{ nach } r & [r = \pm \sqrt{\frac{A}{\pi}}] \\
 \text{c) } s = \frac{g}{2} t^2, \text{ nach } t & [t = \pm \sqrt{\frac{2s}{g}}] \\
 \text{d) } F_Z = \frac{m}{r} v^2, \text{ nach } v & [v = \pm \sqrt{\frac{F_Z r}{m}}] \\
 \text{e) } F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \text{ nach } r & [r = \pm \sqrt{\frac{\gamma m_1 m_2}{F}}] \\
 \text{f) } F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{s^2}, \text{ nach } s & [s = \pm \sqrt{\frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi\epsilon F}}] \\
 \text{g) } 2mx(mx - n) - (mx - n)^2 = mn(m + n) - 2n^2 & [x = \pm \frac{\sqrt{m^2 n + mn^2 - n^2}}{m}]
 \end{array}$$

**8 Gleichungen mit einer Summe im Nenner**

$$a = \frac{x+b}{x-b}, \text{ nach } x$$

**Übung**

15. Löse jeweils nach der angegebenen Variable auf.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } f = \frac{a \cdot b}{a+b}, \text{ nach } a & [a = -\frac{fb}{f-b}] \\
 \text{b) } R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}, \text{ nach } R_2 & [R_2 = -\frac{RR_1}{R-R_2}] \\
 \text{c) } Z = \frac{\omega L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}, \text{ nach } L_1 & [L_1 = -\frac{ZL_2}{Z-\omega L_2}] \\
 \text{d) } \rho = \frac{\gamma_F \cdot G}{G - G_F}, \text{ nach } G & [G = -\frac{\rho G_F}{\gamma_F - \rho}]
 \end{array}$$

## 9 Textaufgaben, die auf eine Gleichung 1.Grades führen

16. Wenn man das Vierfache einer bestimmten Zahl um eins vermindert, erhält man das Fünffache der um 4 verminderten Zahl. Wie heisst die Zahl ? [19]
17. Vater und Tochter haben einen Altersunterschied von 28 Jahren. Nach 16 Jahren wird der Vater gerade doppelt so alt sein wie die Tochter. Wie alt sind die beiden heute ? [V: 40 J., T: 12 J.]
18. Eine Treppe hat 16 Stufen. Würde man jede Stufe um 2.5 cm höher machen, könnte man zwei Stufen einsparen. Wie hoch ist eine Stufe, wie hoch die ganze Treppe ? [Eine Stufe: 17.5 cm, Treppe: 280 cm]
19. Die Summe von fünf (sieben) aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 385. Welches ist die kleinste dieser Zahlen ? [75]
20. Die Summe von vier aufeinanderfolgenden geraden Zahlen ist 740. Welches ist die grösste dieser 4 Zahlen ? [188]
21. In einem Viereck ist der Winkel Beta um  $10^\circ$  grösser als Alpha. Gamma übertrifft Beta um  $20^\circ$  und ist selber um  $30^\circ$  kleiner als Delta. Wie gross sind diese vier Winkel ? [ $65^\circ, 75^\circ, 95^\circ, 125^\circ$ ]
22. Die Summe des Zählers und des Nenners eines ungekürzten Bruches beträgt 120. Nach vollständigem Kürzen erhalten wir den Bruch  $7/8$ . Welchen Bruch hatten wir ursprünglich ? [56/64]
23. Wenn ich eine Zahl mit 25 multipliziere, vom Produkt 700 subtrahiere und die Differenz durch 7 dividiere, so erhalte ich dasselbe, wie wenn ich vom Vierfachen der Zahl die Hälfte der Zahl subtrahiere und zur Differenz 42 addiere. [1988]
24. Vergrössert man bei einem Würfel die Kantenlänge um 5 cm, so wächst seine Oberfläche um  $990 \text{ cm}^2$ . Welches ist die ursprüngliche Länge einer Kante ? [14]
25. In einem Gehege werden Kaninchen und Hühner gehalten. Sie haben zusammen 35 Köpfe und 94 Beine. Wieviele Tiere von jeder Art sind im Gehege ? [12 K., 23 H.]
26. Zwei Zahlen unterscheiden sich um 4, ihre Quadrate um 480. Welches ist die grössere der beiden Zahlen ? [28]
27. Jemand möchte eine Badewanne mit 220 Litern Wasser füllen. Es stehen ihm heisses Boilerwasser ( $62^\circ$ ) und kaltes Leitungswasser ( $7^\circ$ ) zur Verfügung. Wieviele Liter vom heissen und vom kalten Wasser muss er nehmen, damit das Badewasser eine Temperatur von  $36^\circ$  aufweist ? [116 l h. W., 104 l k. W.]
28. Drei Kapitalien von 4000 Fr., 5500 Fr. und 8500 Fr. ergeben einen Jahreszins von zusammen 740 Fr. Der Zinssatz für das 2. Kapital ist ein halbes Prozent höher als derjenige für das 1. Kapital, und der Zinssatz für das 3. Kapital ist um ein ganzes Prozent höher als für das 2. Kapital. Welches sind die 3 Zinssätze ? [3.25%, 3.75%, 4.75%]
29. Die Quersumme einer zweistelligen Zahl ist 12. Vertauscht man ihre Ziffern, wird sie um 18 grösser. Wie heisst die ursprüngliche Zahl ? [57]