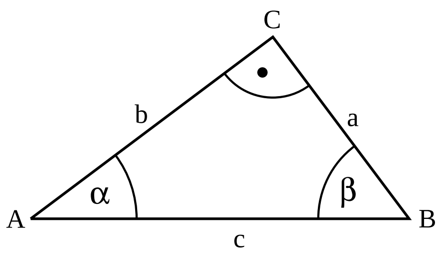
1.4 Trigonometrie

Inhaltsverzeichnis

1 Seitenverhältnisse beim rechtwinkligen Dreieck

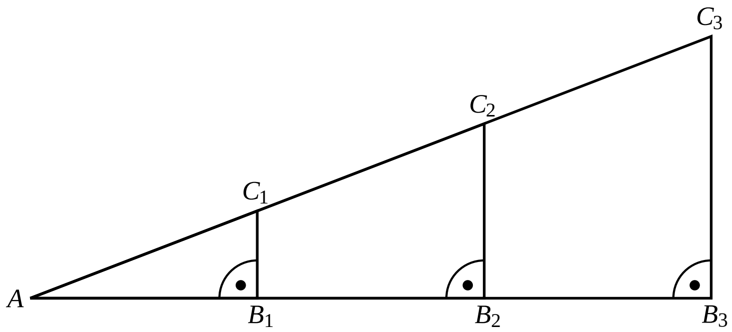
Das Wort Trigonometrie kommt aus dem griechischen: trigonon heisst Dreieck und metron heisst Mass. Trigonometrie heisst also Dreiecksvermessung.

Wir befassen uns bei diesem Thema **nur mit rechtwinkligen Dreiecken** ΔABC mit den folgenden Bezeichnungen:



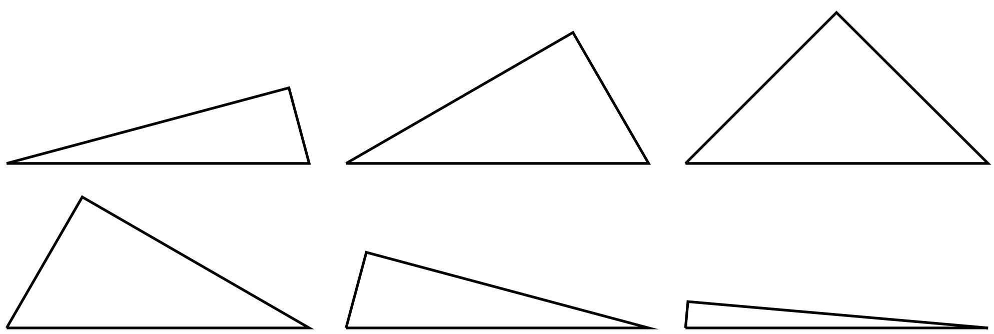
Einführungsaufgaben

1. Unten sind 3 Dreiecke mit gleichem Winkel α gezeichnet.



Berechne bei diesen 3 Dreiecken $\Delta AB_1C_1, \Delta AB_2C_2$ und ΔAB_3C_3 die Werte des Verhältnisses $\overline{AB_1} : \overline{AC_1}$ durch Abmessung (d.h. wenn z.B. $\overline{AB_1} = 2\,\text{cm}$ und $\overline{AC_1} = 4\,\text{cm}$, dann ist das Verhältnis $\overline{AB_1} : \overline{AC_1} = 0.5$). Was beobachtest Du und welchen Schluss ziehst Du daraus ?

2. Unten sind 6 rechtwinklige Dreiecke mit den Winkeln $\alpha = 15^\circ, \alpha = 30^\circ, \alpha = 45^\circ, \alpha = 60^\circ, \alpha = 75^\circ$ und $\alpha = 85^\circ$ gezeichnet.



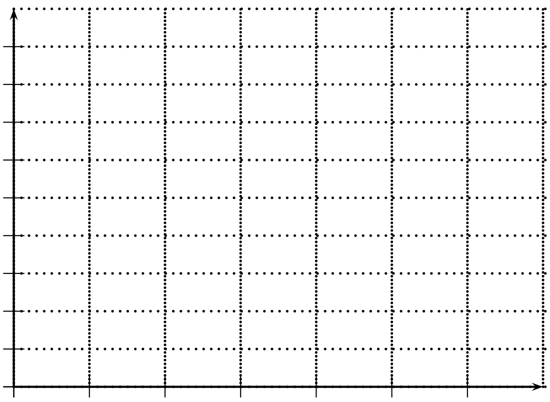
a) Berechne bei den oberen 6 Dreiecken jeweils den Wert des Verhältnisses $\overline{BC} : \overline{AB}$ durch Abmessung. Trage Deine Ergebnisse dann in die Tabelle ein.

b) Berechne bei den oberen 6 Dreiecken jeweils den Wert des Verhältnisses $\overline{AC} : \overline{AB}$ durch Abmessung. Trage Deine Ergebnisse dann in die Tabelle auf der ein.

c) Berechne bei den oberen 6 Dreiecken jeweils den Wert des Verhältnisses $\overline{BC} : \overline{AC}$ durch Abmessung. Trage Deine Ergebnisse dann in die Tabelle ein.

	15°	30°	45°	60°	75°	85°
$\overline{BC} : \overline{AB}$						
$\overline{AC} : \overline{AB}$						
$\overline{BC} : \overline{AC}$						

d) Trage Deine Ergebnisse nun in den untenstehenden Grafen ein. Trage auf der x-Achse die Winkel in 15°-er Abständen ein, auf der y-Achse die Verhältnisse in 0.1-Abständen. Wähle dabei für jedes Verhältnis eine andere Farbe.



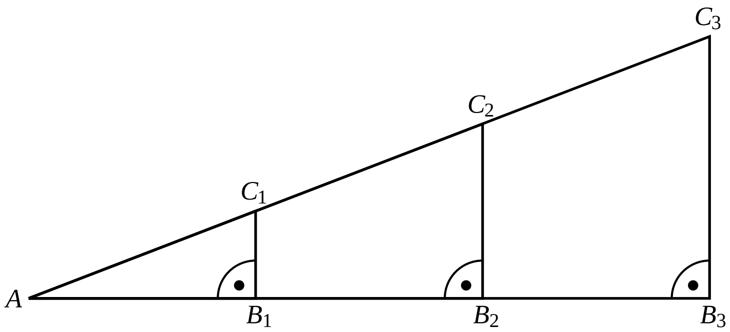
e) Ändert sich etwas am Seitenverhältnis, wenn wir das Dreieck vergrössern, die Winkel aber gleich bleiben ?

f) Welche Werte können wir erhalten ? Gibt es einen maximalen und einen minimalen Wert ?

g) Wenn wir ein Verhältnis zu einem Winkel wissen, können wir dann das Verhältnis zum doppelten Winkel herausfinden ?

2 Die trigonometrischen Funktionen

2.1 Was sind trigonometrischen Funktionen ?



Die Werte der Streckenverhältnisse

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{AC_4}} = \ldots$$

oder

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{AB_3}}{\overline{B_3C_3}} = \frac{\overline{AB_4}}{\overline{B_4C_4}} = \ldots$$

sind von der Lage des Lotes $\overline{BC}$ unabhängig. Sie sind einzig und allein durch die Grösse des Winkels α bestimmt und ändern sich mit diesem.

Wir können einem Winkel **sein** Verhältnis zuordnen und umgekehrt einem Verhältnis den **dazugehörigen Winkel**. Beachte, dass diese Zuordnung **eindeutig** ist. In der Mathematik benutzt man für Zuordnungen den Begriff **Funktion**. Weil diese Zuordnung bei Dreiecken geschieht, sprechen wir von **trigonometrischen Funktionen**.

2.2 Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck

Ein rechtwinkliges Dreieck besteht aus drei Seiten, eine davon ist die **Hypothenuse** (liegt dem rechten Winkel gegenüber), die anderen beiden sind die **Katheten**. Bei den Katheten unterscheiden wir neu zwischen **Gegenkathete und Ankathete**.

2.3 Die 6 trigonometrischen Funktionen

Ingesamt erhalten wir beim rechtwinkligen Dreieck 6 verschiedene Verhältniswerte, die folgendermassen benannt und definiert werden:

1. $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{c}$
2. $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c}$
3. $\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$
4. $\cot(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a}$
5. $\sec(\alpha) = \frac{\text{Hypothenuse}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{c}$
6. $\text{cosec}(\alpha) = \frac{\text{Hypothenuse}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{a}{c}$

Die beiden letztgenannten Funktionen werden selten gebraucht.

Die $\sin, \cos$ und tan-Funktion finden wir auf dem Taschenrechner. Ist das Verhältnis bekannt, so können wir mit $\sin^{-1}, \cos^{-1}$ oder $\tan^{-1}$ den dazugehörigen Winkel berechnen. Z.B. ist $\sin(30^\circ) = 0.5$ und $\sin^{-1}(0.5) = 30^\circ$.

Beispiel

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit $a = 3\,\text{cm}$ und $\beta = 50^\circ$. Berechne die übrigen Seiten und Winkel.

Übungen

1. Berechne die gesuchten Werte.

   a) $\sin 31^\circ =$ $[0.52]$ b) $\tan 27^\circ =$ $[0.51]$

   c) $\cos\alpha = 0.34; \alpha = ?$ $[70.12^\circ]$ d) $\tan\alpha = 2.5; \alpha = ?$ $[68.20^\circ]$

2. Das Verhältnis bei einem rechtwinkligen Dreieck zwischen AK (bezogen auf α) und H beträgt 0.32. Wie gross ist der Winkel α ? $[71.34^\circ]$

3. Wie hoch ist eine Tanne, wenn ihr Schatten $s = 27.5\,\text{m}$ lang ist und die Sonnenstrahlen unter dem Winkel $\alpha = 38^\circ$ einfallen ? $[21.49\,\text{m}]$

4. Berechne die fehlenden Winkel und Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn $b = 2.4\,\text{cm}$ und $\alpha = 67^\circ$ sind. $[a = 5.65\,\text{cm}, c = 6.14\,\text{cm}, \beta = 23^\circ]$

5. Aus einer Entfernung $e = 60\,\text{m}$ erblickt man die Spitze eines Turmes unter dem Höhenwinkel $\alpha = 27^\circ$. Wie hoch ist der Turm, wenn die Augenhöhe $a = 1.5\,\text{m}$ beträgt ? $[32.07\,\text{m}]$

6. Welchen Flächeninhalt hat ein Parallelogramm (ein Viereck mit je zwei parallelen Seiten) mit

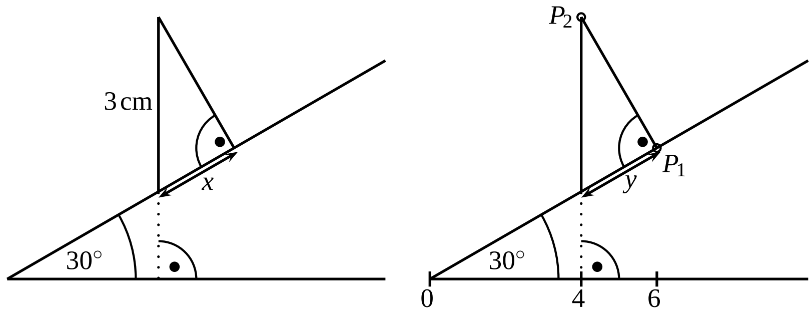
   a) $a = 8\,\text{cm}, d = 10\,\text{cm}, \alpha = 60^\circ$ $[A = 69.28\,\text{cm}^2]$ b) $a = 12.0\,\text{m}, b = 7.5\,\text{m}, \beta = 125^\circ$ $[A = 73.72\,\text{m}^2]$

7. Von einem Schiff aus erscheint die Spitze eines Leuchtturms, der $h = 56\,\text{m}$ hoch ist, unter dem Höhenwinkel $\alpha = 5^\circ$. Wie weit ist das Schiff von dem Leuchtturm entfernt, wenn sich das Auge des Beobachters $a = 5.8\,\text{m}$ und der Fuss des Turmes $b = 7.5\,\text{m}$ über dem Meeresspiegel befinden ? $[659.51\,\text{m}]$

8. Vom dritten Stock eines Hauses $(h = 11.2\,\text{m})$ erscheint das jenseitige Ufer eines Flusses unter dem Tiefenwinkel $\alpha = 8^\circ$. Wie breit ist der Fluss, wenn das Haus vom diesseitigen Ufer $e = 3.5\,\text{m}$ entfernt ist ? $[76.19\,\text{m}]$

9. Ein Kreis hat den Radius $r = 3.2\,\text{cm}$ und den Mittelpunktswinkel $\alpha = 112^\circ$. Berechne die Länge der dazugehörigen Sehne s. $[s = 5.3\,\text{cm}]$

10. Berechne die Länge der Strecke x auf der linken Abbildung bzw. y und die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 auf der rechten Abbildung. $[x = 1.5\,\text{cm}, y = 2.31, P_1(6|3.46), P_2(4|6.93)]$



11. Von einem Punkt P sind die Tangenten an den Kreis gezeichnet. Berechne den Winkel α, den die beiden Tangenten einschliessen ($r = 2.9\,\text{cm}, \overline{MP} = 4\,\text{cm}$). $[92.94^\circ]$

12. Von einem Haus in einem Tal beobachtet man die Bergspitze B unter dem Höhenwinkel $\beta = 17^\circ$, die Bergspitze A unter dem Höhenwinkel $\alpha = 20^\circ$. Die Bergspitze A liegt 1376 m ü.M., Bergspitze B 1616 m ü.M. und das Haus 887 m ü.M, wobei die Spitzen auf der gleichen Seite des Hauses liegen. Das Haus, die Bergspitzen A und B bilden eine zur Erdoberfläche lotrechte Ebene. Berechne die Entfernung e von der Bergspitze A zur Bergspitze B. $[1068.24\,\text{m}]$

13. Berechne den Winkel, den die Raumdiagonale eines Würfels mit einer Kante einschliesst. $[54.74^\circ]$

14. Ein Quader hat die Kanten $a = 5\,\text{cm}, b = 4\,\text{cm}$ und $c = 3\,\text{cm}$. Berechne die Winkel α, β und γ, welche die Raumdiagonale des Quaders mit den Kanten a, b und c bildet.

2.4 Geometrische Veranschaulichung der trigonometrischen Funktionswerte

Die trigonometrischen Funktionswerte können wir am Einheitskreis darstellen (Einheitskreis: Kreis, dessen Radius 1 ist).

2.5 Beziehungen zwischen trigonometrischen Funktionen

Zwischen den trigonometrischen Funktionen lassen sich Zusammenhänge formulieren (Sätze).

Übung

13. Vereinfache folgende Terme.

a) $\tan\alpha \cdot \cos\alpha =$

b) $\sin\alpha / \tan\alpha =$

c) $\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^3\alpha =$

d) $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha \tan^2\alpha =$