# 1.2 Rechnen mit Termen II

## Inhaltsverzeichnis

# Rechnen mit Termen 2

**(Thema aus dem Gebiet Algebra)**

## 1 Ziele

- Ich kann mit Potenzen umgehen, die den Exponenten 0 oder einen negativen Exponenten haben.
- Ich kenne die Potenzgesetze und kann sie anwenden.
- Ich kenne die Wurzelgesetze und kann sie anwenden.
- Ich kann das Distributivgesetz formulieren und anwenden.
- Ich kann mit dem Distributivgesetz beweisen, dass $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$ gilt.
- Die binomischen Formeln können angewendet werden.
- Ich kann mit einem Ausdruck umgehen, der mehr als zwei Klammerpaare enthält (z.B. $(a+b)(c+d)(e+f)$).
- Ich kann mit Trinomen umgehen (z.B. $(a+b+c)^2$).
- Potenzen mit „grossen “Exponenten (3,4,...) können mit Hilfe des Pascalschen Dreieck ausgerechnet werden.

## 2 Potenzen, bei denen der Exponent negativ oder 0 ist

Wir kennen folgendes Gesetz, das für $n, m \in \mathbf{N}$ mit $n > m$ gilt.

$$a^n : a^m =$$

Wir möchten dieses Gesetz nicht nur für $n > m$, sondern auch für $n = m$ und $n < m$ formulieren. Es treten dann aber Ausdrücke wie $a^0$ (z.B. $a^5 : a^5$) und $a^{-2}$ (z.B. $a^3 : a^5$) auf. Im folgenden legen wir fest, wie wir mit solchen Ausdrücken umgehen wollen.

**Definition 1** *Gegeben ist ein Term a, der nicht 0 ist und $n \in \mathbf{N}$. Dann gilt folgende Abmachung:*

**Definition 2** *Gegeben ist ein Term a, der nicht 0 ist. Dann gilt folgende Abmachung:*

**Bemerkung:** Wir ordnen dem Term $0^0$ keinen Wert zu. Die Frage, ob man diesem Term den Wert 1 oder keinen Wert zuordnen soll, hat zu vielen Diskussionen in der Mathematik geführt.

**Beispiele:**

# 3 Potenzregeln

Für die Multiplikation von speziellen Termen gibt es Gesetze (oder Sätze), die sogenannten **Potenzgesetze**.

**Satz 1** *$a$ ist ein Term und $m,n \in \mathbf{Z}$ ($m,n$ sind Elemente der ganzen Zahlen, z.B. 2,3,0,-3). Dann gilt:*

**Merke:**

**Satz 2** *$a,b$ sind Terme, $n \in \mathbf{Z}$. Dann gilt:*

**Merke:**

**Satz 3** *$a$ ist ein Term, $m,n \in \mathbf{Z}$. Dann gilt:*

**Beispiele:**

1. Forme so um, dass sich das Endergebnis nicht weiter kürzen lässt und der Exponent weder negativ noch 0 ist.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $a^{101} \cdot a^{100} =$ | b) $a \cdot a^n =$ | c) $a^{n+2} \cdot a^{n+1}$ | d) $2^{-3} \cdot 2^{-4} =$ |
| e) $b^5 \cdot b^{-7} =$ | f) $a^{-3} \cdot a^n =$ | g) $b^{n+1} \cdot b^{-2} =$ | h) $x^{-n} \cdot x^{-n} =$ |
| i) $a^{-3} \cdot a^n =$ | j) $z^7 : z^5 =$ | k) $s^4 : s =$ | l) $c^8 : c^0 =$ |
| m) $z^9 : z^9 =$ | n) $a^{n+1} : a^n =$ | o) $4^5 : 4^{-1} =$ | p) $6^0 : 6^{-2} =$ |
| q) $c^{-2} : c^{-5} =$ | r) $a^n : a^{n-1} =$ | | |

2. Fasse soweit wie möglich zusammen.

| | |
|---|---|
| a) $(-5n^2) \cdot 2n^3 \cdot (-2n)^3 =$ | b) $(-7a^3) \cdot (-2ab)^3 \cdot (-a^2b) =$ |
| c) $(-6) \cdot (-2a) \cdot (-1.5a)^2 \cdot (-a)^3 =$ | d) $(-\frac{1}{4}) \cdot (-\frac{1}{2}a) \cdot (-6x) \cdot (-y)^2 =$ |

3. Fasse soweit wie möglich zusammen.

a) $(-a^3)^4 - (-2a)^3 + a^{12} - 3a^3 =$

b) $(-2z)^3 - (-z^2)^3 + (-4z^3) + (-z)^6 - 5z^3 =$

c) $(-2a^2b)^3 - 3a^4b(-4ab)^2 - (-5a^6b^2)(-b) =$

d) $(-a^2)^2 - 3a(-\frac{1}{3}a^3) + a^2(-a^2) =$

4. Forme so um, dass das Endergebnis die Form $a^b$ hat und der Exponent weder negativ noch 0 ist.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) $x^{-n} \cdot 2^{-n} =$ | b) $4^{-6} \cdot 2.5^{-6} =$ | c) $(6x)^{-n} \cdot (3x)^{-n} =$ | d) $\left(7^0\right)^{-7} =$ |
| e) $\left(-10^4\right)^5 =$ | f) $\left((-10)^4\right)^5 =$ | g) $\left((-10)^5\right)^{-4} =$ | h) $\left(3^{-2}\right)^{-3} =$ |

# 4 Terme mit Wurzelausdrücken

Die korrekte Definition des Wurzelbegriffs werden wir erst später kennenlernen. Erstens ist diese Definition relativ kompliziert und zweitens fehlt uns auch dafür notwendiges Wissen. Wir begnügen uns deshalb damit, dass wir mit Wurzeln rechnen können.

Wir kennen bereits die zweite Wurzel. Die zweite Wurzel (oder auch einfach Wurzel) von 36 ist 6, weil $6 \cdot 6 = 36$ ist. Beachte die folgenden Punkte:

# 5 Wurzelgesetze

**Satz 4** *$a \geq 0$ und $b \geq$ sind beliebige Terme. Dann gilt:*

**Satz 5** $a \geq 0, b > 0$ *sind beliebige Terme. Es gilt:*

**Beispiele**

5. Fasse so zusammen, dass im Endergebnis nur ein Wurzelzeichen vorkommt.

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} =$ b) $\sqrt{72} : \sqrt{2} =$ c) $\sqrt{20} : \sqrt{5} =$ d) $\sqrt{a^2}$

e) $\sqrt{b^4} =$ f) $\sqrt{\dfrac{c^3 d}{cd^3}} =$ g) $\sqrt{4p^2q^6} =$ h) $\sqrt{\dfrac{12r^4st^2}{27s^5t^2}} =$

i) $\sqrt{xy} \cdot \sqrt{xz} \cdot \sqrt{yz} =$ j) $\sqrt{\dfrac{5}{33}} \cdot \sqrt{\dfrac{11}{15}} =$ k) $(a\sqrt{a})^2 =$ l) $\sqrt{3\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6\sqrt{2}} =$

6. Fasse soweit wie möglich zusammen.

a) $\sqrt{ab} + 3\sqrt{ab} - 2\sqrt{ab} =$ b) $\sqrt{ab} - \sqrt{9ab} =$

c) $\sqrt{a} + \sqrt{a^2} + \sqrt{a^3} =$ d) $\sqrt{ab} - \sqrt{ac} - (2\sqrt{ab} + \sqrt{ac})$

# 6 Distributivgesetz

Als erstes legen wir fest, wie wir mit einer Kombination von Addition, Multiplikation und Klammern umgehen wollen. Später werden wir sehen, dass diese Festlegung nicht zufällig, sondern in Übereinstimmung mit unseren Beobachtungen steht. Das ist wichtig, denn sonst ist die Mathematik für alltägliche Berechnungen nicht brauchbar.

**Definition 3** *(Distributivgesetz)* $a, b$ *und* $c$ *sind Terme. Wir legen fest:*

**Satz 6** $a, b$ *und* $c$ *sind Terme. Dann gilt:*

**Beweis:**

**Übungen**

7. Verwandle die folgenden Produkte in Summen oder Differenzen !

   a) $5 \cdot (8a + 7b) =$
   b) $7 \cdot (9x - 11y) =$
   c) $2a \cdot (3u + 5w) =$
   d) $11a \cdot (9a + 7b) =$
   e) $8ab \cdot (9a - 17b) =$
   f) $3x^2y \cdot (6x^2y - 5xy^2) =$
   g) $13a \cdot (3a + 4b - 5c + 6d) =$
   h) $7 \cdot [(9x - 11y) + 5z] =$

8. Verwandle die folgenden Produkte in Summen oder Differenzen !

   a) $(45e - 15f) \cdot (-1) =$
   b) $(21u - 77v) : (-7) =$
   c) $(48a^2b - 168ab^2) : 12ab =$
   d) $(25a^8 - 20a^6 - 55a^4) : 5a^2 =$
   e) $(287x^{287} - 205x^{205}) : 41x^{41} =$

9. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

   a) $11(7a + 3b) + 8(5a - 2b) =$
   b) $7(7a + 3b) - 8(5a + 3b) =$
   c) $\sqrt{2}a(\sqrt{2}a + \sqrt{8}b) =$
   d) $5x(9x - 7y) - 8y(5x - 6y) - 32(x^2 + y^2) =$
   e) $\frac{3}{5}\left(\frac{2}{7}a + \frac{5}{14}b\right) - \frac{3}{7}\left(\frac{2}{5}a - \frac{11}{20}b\right) =$
   f) $\sqrt{12a}(\sqrt{3a} - \sqrt{8b}) - \sqrt{6}(\sqrt{6}a + 4\sqrt{ab}) =$

10. Setze an Stelle der Variablen Zahlen (bzw. Mengen) ein und prüfe, ob die Gleichheit gilt ! Die Bedeutung der Zeichen aus der Mengenlehre:

    - $\cup$: Vereinigung
    - $\cap$: Schnittmenge
    - $\setminus$: ohne

    a) $a : (b + c) = a : b + a : c$?
    b) $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$?
    c) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$?
    d) $(a - b)^2 = a^2 - b^2$?
    e) $(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot (b : c)$?
    f) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$?
    g) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$?
    h) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$?

# 7 Substitution von Termen

Das Wort Substitution bedeutet ersetzen. In der Mathematik ersetzen wir manchmal einen Term durch einen anderen, um den ganzen Ausdruck zu vereinfachen.

**Beispiel:**

**Übungen**

11. Multipliziere die folgenden Aufgaben mit Hilfe der Substitution aus !

    a) $(a+b)\cdot(c+d) =$  b) $(a-b)\cdot(c-d) =$

    c) $(a+b+c)\cdot(d-e) =$  d) $(a+b-c)\cdot(d+e) =$

## 8 Multiplikation von Summen und Differenzen

**Satz 7** *$a, b, c$ und $d$ sind Terme. Es gilt:*

**Beweis:**

**Übungen**

12. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

    a) $(2a+b)\cdot(3b-d) =$  b) $(3a-b)\cdot(c-2d) =$

    c) $(2a+b+3c)\cdot(d-2e) =$  d) $(a^2+b^3-c^4)\cdot(d^2+e^3) =$

13. Berechne mit dem Distributivgesetz !

    a) $77\cdot2003 =$  b) $13\cdot199 =$

    c) $73\cdot9998 =$  d) $2003\cdot18 =$

14. Berechne den Flächeninhalt des nebenstehenden Rechtecks auf zwei Arten (1.Weg: Länge mal Breite; 2.Weg: Alle Rechtecke einzeln berechnen und dann addieren) und vergleiche die Ergebnisse !

15. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

    a) $(4a+9b)(3a+2b)-(2a-3b)(6a-6b) =$

    b) $(5x-9)(6y+11)-(3x+10)(10y-3) =$

    c) $(a+1)(a-2)-(a-3)(a+4) =$

    d) $(b-1)(b+3)+(b^2+3b)(b+1) =$

e) $(\sqrt{6x}-9)(\sqrt{6x}+5)+(\sqrt{2x}-11)(\sqrt{8x}+22)=$

f) $(\sqrt{x}-5)(2\sqrt{x}-16)-(3-\sqrt{x})(\sqrt{x}-9)=$

g) $(2e^2-3f^2)(3e^2-5f^2)-(3e^2-5f^2)(e^2+f^2)=$

h) $(4x^2-6y^2)(6x^2+9y^2)-(4x^4+9y^4)=$

16. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

a) $xy(9w+11x)(8y-5z)=$

b) $a^2b(7a-2b)(14a+4b)=$

17. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

a) $(a+b)(c+d)(e+f)=$

b) $(2a+3b)(a+4b)(3a+b)=$

c) $(a+b)(c-d)(e-f)=$

d) $(2a+3b)(a-4b)(3a-b)=$

18. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

a) $(a+b+c)^2=$

b) $(a+b-c)(a+b+c)=$

c) $(a+b-c)^2=$

d) $(a+b-c)(a-b+c)=$

e) $(2u-5v+w)^2=$

f) $(5a+3b)^2-(5a-3b)^2=$

# 9 Binomische Formeln

Ausdrücken der folgenden Form werden wir häufig begegnen:

- $(a+b)^2=$
- $(a-b)^2=$
- $(a+b)(a-b)=$

**Satz 8** *a und b sind Terme. Es gilt:*

19. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

a) $(u+v)^2=$

b) $(2a+3b)^2=$

c) $(2a+b)(2a-b)=$

d) $(3u-5)^2=$

e) $(12a-11b)^2=$

f) $(21x+5)(21x-5)=$

g) $[3a(4u-5v)]^2=$

h) $[4(8u-9v)]^2=$

20. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

a) $\left(\frac{e}{5}-\frac{f}{6}\right)\left(\frac{e}{5}+\frac{f}{6}\right)=$

b) $\left(\frac{6e}{5}-\frac{5f}{6}\right)^2=$

c) $\left(\frac{3}{5}u-5v\right)^2=$

d) $(n\sqrt{8}-p\sqrt{18})^2=$

e) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=$

f) $(\sqrt{4u-5v}+\sqrt{4u+5v})^2=$

21. Ergänze die folgenden Gleichungen so, dass sie binomische Formeln wiedergeben !

a) $(3x+\ldots)^2=\ldots+\ldots+49$

b) $(\ldots-4)^2=\ldots-48y+\ldots$

c) $(\ldots+\ldots)^2=4x^2+32x+\ldots$

d) $(\ldots+\ldots)^2=\ldots+180x+100$

e) $(\ldots-\ldots)^2=36x^4-24x^2+\ldots$

f) $(\ldots-\ldots)^2=\ldots-130a+169$

g) $(3a+\ldots)(\ldots-5)=\ldots-\ldots$

h) $(\ldots+\ldots)(\ldots-3c)=-\ldots+4d^2$

i) $(\ldots+6)(\ldots-\ldots)=\ldots-100p^6$

22. Schreibe mit Klammern als binomischer Ausdruck, falls möglich:

a) $b^2+10ab+25=$

b) $x^2-y^2=$

c) $b^2-bc-c^2=$

d) $4a^2+12ab+9b^2=$

e) $a^2+4ab+b^2=$

f) $4a^2-b^2=$

# 10 Summen und Differenzen mit höheren Potenzen

In diesem Abschnitt geht es darum, Potenzen der Form $(a+b)^3, (a+b)^4$, usw. zu berechnen. Wir können alles ausmultiplizieren, was sehr mühsam und zeitraubend ist. Viel schneller geht es mit dem Pascalschen Dreieck, welches folgendermassen aussieht:

**Beispiele:**

- Berechne den Term $(a+b)^3$ !

  **Lösung**

- Berechne $(a-b)^5$ !

  **Lösung**

23. Berechne die folgenden Ausdrücke mit dem Pascalschen Dreieck und mit normalem Ausmultiplizieren. Vergleiche danach die Resultate !

    a) $(a+b)^3 =$ b) $(a+b)^4 =$

24. Berechne mit dem Pascalschen Dreieck und überprüfe mit dem Taschenrechner !

    a) $(3-2)^4 =$ b) $(2+3)^5 =$

25. Berechne die folgenden Ausdrücke mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks !

    a) $(a-b)^4 =$ b) $(3a+5b)^4 =$

    c) $(2u-1)^5 =$ d) $(-a+1)^6 =$