

Lösungen

1. Forme so um, dass sich das Endergebnis nicht weiter kürzen lässt und der Exponent weder negativ noch 0 ist.

a) $a^{101} \cdot a^{100} =$	b) $a \cdot a^n =$	c) $a^{n+2} \cdot a^{n+1} =$	d) $2^{-3} \cdot 2^{-4} =$
e) $b^5 \cdot b^{-7} =$	f) $a^{-3} \cdot a^n =$	g) $b^{n+1} \cdot b^{-2} =$	h) $x^{-n} \cdot x^{-n} =$
i) $a^{-3} \cdot a^n =$	j) $z^7 : z^5 =$	k) $s^4 : s =$	l) $c^8 : c^0 =$
m) $z^9 : z^9 =$	n) $a^{n+1} : a^n =$	o) $4^5 : 4^{-1} =$	p) $6^0 : 6^{-2} =$
q) $c^{-2} : c^{-5} =$	r) $a^n : a^{n-1} =$		

2. Fasse soweit wie möglich zusammen.

a) $\underline{\underline{(-5n^2) \cdot 2n^3 \cdot (-2n)^3 = 80n^8}}$

b) $\underline{\underline{(-7a^3) \cdot (-2ab)^3 \cdot (-a^2b) = -56a^8b^4}}$

c) $\underline{\underline{(-6) \cdot (-2a) \cdot (-1.5a)^2 \cdot (-a)^3 = -27a^6}}$

d) $\underline{\underline{(-\frac{1}{4}) \cdot (-\frac{1}{2}a) \cdot (-6x) \cdot (-y)^2 = -\frac{6}{8}axy^2}}$

3. Fasse soweit wie möglich zusammen.

a) $\underline{\underline{(-a^3)^4 - (-2a)^3 + a^{12} - 3a^3 = a^{12} + 8a^3 + a^{12} - 3a^3 = 2a^{12} + 5a^3}}$

b) $\underline{\underline{(-2z)^3 - (-z^2)^3 + (-4z^3) + (-z)^6 - 5z^3 = -8z^3 + z^6 - 4z^3 + z^6 - 5z^3 = 2z^6 - 17z^3}}$

c) $\underline{\underline{(-2a^2b)^3 - 3a^4b(-4ab)^2 - (-5a^6b^2)(-b) = -8a^6b^3 - 48a^6b^3 - 5a^6b^3}}$

d) $\underline{\underline{(-a^2)^2 - 3a(-\frac{1}{3}a^3) + a^2(-a^2) = a^4 + a^4 - a^4 = a^4}}$

4. Forme so um, dass das Endergebnis die Form a^b hat und der Exponent weder negativ noch 0 ist.

a) $x^{-n} \cdot 2^{-n} =$	b) $4^{-6} \cdot 2.5^{-6} =$	c) $(6x)^{-n} \cdot (3x)^{-n} =$	d) $(7^0)^{-7} =$
e) $(-10^4)^5 =$	f) $\left((-10)^4\right)^5 =$	g) $\left((-10)^5\right)^{-4} =$	h) $(3^{-2})^{-3} =$

5. Verwandle die folgenden Produkte in Summen oder Differenzen !

a) $\underline{\underline{5 \cdot (8a + 7b) = 40a + 35b}}$

b) $\underline{\underline{7 \cdot (9x - 11y) = 63x - 77y}}$

c) $\underline{\underline{2a \cdot (3u + 5w) = 6au + 10aw}}$

d) $\underline{\underline{11a \cdot (9a + 7b) = 99a^2 + 77ab}}$

e) $\underline{\underline{8ab \cdot (9a - 17b) = 72a^2b - 136ab^2}}$

f) $\underline{\underline{3x^2y \cdot (6x^2y - 5xy^2) = 18x^4y^2 - 15x^3y^3}}$

g) $\underline{\underline{13a \cdot (3a + 4b - 5c + 6d) = 39a^2 + 52ab - 65ac + 78ad}}$

h) $\underline{\underline{7 \cdot [(9x - 11y) + 5z] = 63x - 77y + 35z}}$

6. Verwandle die folgenden Produkte in Summen oder Differenzen !

a) $\underline{\underline{(45e - 15f) \cdot (-1) = -45e + 15f}}$

b) $\underline{\underline{(21u - 77v) : (-7) = -3u + 11v}}$

- c) $\underline{\underline{(48a^2b - 168ab^2) : 12ab = 4a - 14b}}$
 d) $\underline{\underline{(25a^8 - 20a^6 - 55a^4) : 5a^2 = 5a^6 - 4a^4 - 11a^2}}$
 e) $\underline{\underline{(287x^{287} - 205x^{205}) : 41x^{41} = 7x^{246} - 5x^{164}}}$

7. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

- a) $\underline{\underline{11(7a + 3b) + 8(5a - 2b) = 77a + 33b + 40a - 16b = 117a + 17b}}$
 b) $\underline{\underline{7(7a + 3b) - 8(5a + 3b) = 49a + 21b - 40a - 24b = 9a - 3b}}$
 c) $\underline{\underline{\sqrt{2}a(\sqrt{2}a + \sqrt{8}b) = 2a^2 + 4ab}}$
 d) $\underline{\underline{5x(9x - 7y) - 8y(5x - 6y) - 32(x^2 + y^2) = 45x^2 - 35xy - 40xy + 48y^2 - 32x^2 - 32y^2 = 13x^2 + 16y^2 - 75xy}}$
 e) $\underline{\underline{\frac{3}{5}(\frac{2}{7}a + \frac{5}{14}b) - \frac{3}{7}(\frac{2}{5}a - \frac{11}{20}b) = \frac{6}{35}a + \frac{15}{70}b - \frac{6}{35}a + \frac{33}{140}b = \frac{63}{140}b}}$
 f) $\underline{\underline{\sqrt{12}a(\sqrt{3}a - \sqrt{8}b) - \sqrt{6}(\sqrt{6}a + 4\sqrt{ab}) = 6a - \sqrt{96ab} - 6a + 4\sqrt{6}\sqrt{ab} (= 0, \text{ weil } -\sqrt{96ab} = -\sqrt{16}\sqrt{6}\sqrt{ab} = -4\sqrt{6}\sqrt{ab})}}$

8. Setze an Stelle der Variablen Zahlen (bzw. Mengen) ein und prüfe, ob das Distributivgesetz gilt ! Die Bedeutung der Zeichen aus der Mengenlehre:

- \cup : Vereinigung
- \cap : Schnittmenge
- \setminus : ohne

Wir setzen $a = 2, b = 3, c = 4, n = 5$ und tippen die Ausdrücke in den TR ein oder sehen es zum Teil auch ohne TR.

- a) $\underline{\underline{2 : (3 + 4) \neq 2 : 3 + 2 : 4}}$
 b) $\underline{\underline{(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2}}$
 c) $\underline{\underline{(2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5}}$
 d) $\underline{\underline{(2 - 3)^2 \neq 2^2 - 3^2}}$
 e) $\underline{\underline{(2 \cdot 3) : 4 \neq (2 : 4) \cdot (3 : 4)}}$
 f) $\underline{\underline{(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)}}$ → schon vorgelöst
 g) $\underline{\underline{(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)}}$ → schon vorgelöst
 h) $\underline{\underline{(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)}}$ → schon vorgelöst

9. Multipliziere die folgenden Aufgaben mit Hilfe der Substitution aus !

- a) $\underline{\underline{(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd}}$
 b) $\underline{\underline{(a - b) \cdot (c - d) = ac - ad - bc + bd}}$
 c) $\underline{\underline{(a + b + c) \cdot (d - e) = ad - ae + bd - be + cd - ce}}$
 d) $\underline{\underline{(a + b - c) \cdot (d + e) = ad + ae + bd + be - cd - ce}}$

10. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

- a) $\underline{\underline{(2a + b) \cdot (3b - d) = 6ab - 2ad + 3b^2 - bd}}$
 b) $\underline{\underline{(3a - b) \cdot (c - 2d) = 3ac - 6ad - bc + 2bd}}$

$$c) \underline{\underline{(2a + b + 3c) \cdot (d - 2e) = 2ad - 4ae + bd - 2be + 3cd - 6ce}}$$

$$d) \underline{\underline{(a^2 + b^3 - c^4) \cdot (d^2 + e^3) = a^2d^2 + a^2e^3 + b^3d^2 + b^3e^3 - c^4d^2 - c^4e^3}}$$

11. Berechne ohne Taschenrechner !

$$a) \underline{\underline{77 \cdot 2003 = (80-3)(2000+3) = 160000+240-6000-9 = 154231}}$$

$$b) \underline{\underline{13 \cdot 199 = (10+3)(200-1) = 2000-10+600-3 = 2587}}$$

$$c) \underline{\underline{73 \cdot 9998 = (70+3)(10000-2) = 700000-140+30000-6 = 729854}}$$

$$d) \underline{\underline{2003 \cdot 18 = (2000+3)(20-2) = 40000-4000+60-6 = 36054}}$$

12. Berechne den Flächeninhalt des nebenstehenden Rechtecks auf zwei Arten (1. Weg: Länge mal Breite; 2. Weg: Alle Rechtecke einzeln berechnen und dann addieren) und vergleiche die Ergebnisse !

- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$
- Alle Quadrate einzeln: $ad + bd + ac + bc$
- Die Resultate stimmen überein. Wir sehen, dass das Distributivgesetz mit der Geometrie übereinstimmt. Das zeigt, dass die Festlegung des Gesetzes sinnvoll war (im Sinne, dass es im Alltag gebraucht werden kann).

13. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

$$a) \underline{\underline{(4a + 9b)(3a + 2b) - (2a - 3b)(6a - 6b) = 12a^2 + 8ab + 27ab + 18b^2 - (12a^2 - 12ab - 18ab + 18b^2) = 12a^2 + 8ab + 27ab + 18b^2 - 12a^2 + 12ab + 18ab - 18b^2 = 65ab}}$$

$$b) \underline{\underline{(5x - 9)(6y + 11) - (3x + 10)(10y - 3) = 30xy + 55x - 54y - 99 - (30xy - 9x + 100y - 30) = 30xy + 55x - 54y - 99 - 30xy + 9x - 100y + 30 = 64x - 154y - 69}}$$

$$c) \underline{\underline{(a + 1)(a - 2) - (a - 3)(a + 4) = a^2 - 2a + a - 2 - (a^2 + 4a - 3a - 12) = a^2 - 2a + a - 2 - a^2 - 4a + 3a + 12 = -2a + 10}}$$

$$d) \underline{\underline{(b - 1)(b + 3) + (b^2 + 3b)(b + 1) = b^2 + 3b - b - 3 + b^3 + b^2 + 3b^2 + 3b = b^3 + 5b^2 + 5b - 3}}$$

$$e) \underline{\underline{(\sqrt{6x} - 9)(\sqrt{6x} + 5) + (\sqrt{2x} - 11)(\sqrt{8x} + 22) = 6x + 5\sqrt{6x} - 9\sqrt{6x} - 45 + \sqrt{16x^2} + 22\sqrt{2x} - 11\sqrt{8x} - 242 = 10x - 4\sqrt{6x} + 22\sqrt{2x} - 11\sqrt{8x} - 287}}$$

$$f) \underline{\underline{(\sqrt{x} - 5)(2\sqrt{x} - 16) - (3 - \sqrt{x})(\sqrt{x} - 9) = 2x - 16\sqrt{x} - 10\sqrt{x} + 80 - (3\sqrt{x} - 27 - x + 9\sqrt{x}) = 2x - 16\sqrt{x} - 10\sqrt{x} + 80 - 3\sqrt{x} + 27 + x - 9\sqrt{x} = 3x - 38\sqrt{x} + 107}}$$

$$g) \underline{\underline{(2e^2 - 3f^2)(3e^2 - 5f^2) - (3e^2 - 5f^2)(e^2 + f^2) = 6e^4 - 10e^2f^2 - 9e^2f^2 + 15f^4 - (3e^4 + 3e^2f^2 - 5e^2f^2 - 5f^4) = 6e^4 - 10e^2f^2 - 9e^2f^2 + 15f^4 - 3e^4 - 3e^2f^2 + 5e^2f^2 + 5f^4 = 3e^4 - 17e^2f^2 + 20f^4}}$$

$$h) \underline{\underline{(4x^2 - 6y^2)(6x^2 + 9y^2) - (4x^4 + 9y^4) = 24x^4 + 36x^2y^2 - 36x^2y^2 - 54y^4 - 4x^4 - 9y^4 = 20x^4 - 63y^4}}$$

14. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

$$a) \underline{\underline{xy(9w + 11x)(8y - 5z) = xy(72wy - 45wz + 88xy - 55z) = 72wxy^2 - 45wxyz + 88x^2y^2 - 55xyz}}$$

$$b) \underline{\underline{a^2b(7a - 2b)(14a + 4b) = a^2b(98a^2 + 28ab - 28ab - 8b^2) = 98a^4b - 8a^2b^3}}$$

15. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

$$a) \underline{\underline{(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2}}$$

$$b) \underline{\underline{(2a + 3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2}}$$

- c) $\underline{\underline{(2a+b)(2a-b) = 4a^2 - b^2}}$
 d) $\underline{\underline{(3u-5)^2 = 9u^2 - 30u + 25}}$
 e) $\underline{\underline{(12a-11b)^2 = 144a^2 - 264ab + 121b^2}}$
 f) $\underline{\underline{(21x+5)(21x-5) = 441x^2 - 25}}$
 g) $\underline{\underline{[3a(4u-5v)]^2 = (12au-15av)^2 = 144a^2u^2 - 360a^2uv + 225a^2v^2}}$
 h) $\underline{\underline{[4(8u-9v)]^2 = (32u-36v)^2 = 1024u^2 - 2304uv + 1296v^2}}$

16. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

- a) $\underline{\underline{\left(\frac{e}{5} - \frac{f}{6}\right)\left(\frac{e}{5} + \frac{f}{6}\right) = \frac{e^2}{25} - \frac{f^2}{36}}}$
 b) $\underline{\underline{\left(\frac{6e}{5} - \frac{5f}{6}\right)^2 = \frac{36e^2}{25} - 2ef + \frac{25f^2}{36}}}$
 c) $\underline{\underline{\left(\frac{3}{5}u - 5v\right)^2 = \frac{9u^2}{25} - 6uv + 25v^2}}$
 d) $\underline{\underline{(n\sqrt{8} - p\sqrt{18})^2 = 8n^2 - 24np + 18p^2}}$
 e) $\underline{\underline{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b}}$
 f) $\underline{\underline{(\sqrt{4u-5v} + \sqrt{4u+5v})^2 = 4u - 5v + 2\sqrt{16u^2 - 25v^2} + 4u + 5v = 8u + 2\sqrt{16u^2 - 25v^2}}}$

17. Ergänze die folgenden Gleichungen so, dass sie binomische Formeln wiedergeben !

- a) $(3x+7)^2 = 9x^2 + 42x + 49$ b) $(6y-4)^2 = 36y^2 - 48y + 16$
 c) $(2x+8)^2 = 4x^2 + 32x + 64$ d) $(9x+10)^2 = 81x^2 + 180x + 100$
 e) $(4x^2-3)^2 = 36x^4 - 24x^2 + 9$ f) $(5a-13)^2 = 25a^2 - 130a + 169$
 g) $(3a+5)(3a-5) = 9a^2 - 25$ h) $(2d+3c)(2d-3c) = 4d^2 - 9c^2$
 i) $(-10p^3+6)(10p^3+6) = 36 - 100p^6$

18. Schreibe mit Klammern als binomischer Ausdruck, falls möglich:

- a) $\underline{\underline{b^2 + 10ab + 25 \Rightarrow \text{geht nicht}}}$ b) $\underline{\underline{x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)}}$
 c) $\underline{\underline{b^2 - bc - c^2 \Rightarrow \text{geht nicht}}}$ d) $\underline{\underline{4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a+3b)^2}}$
 e) $\underline{\underline{a^2 + 4ab + b^2 \Rightarrow \text{geht nicht}}}$ f) $\underline{\underline{4a^2 - b^2 = (2a+b)(2a-b)}}$

19. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

- a) $\underline{\underline{(a+b)(c+d)(e+f) = (ac+ad+bc+bd)(e+f) = ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf}}$
 b) $\underline{\underline{(2a+3b)(a+4b)(3a+b) = (2a^2+8ab+3ab+12b^2)(3a+b) = (2a^2+11ab+12b^2)(3a+b) = 6a^3+2a^2b+33a^2b+11ab^2+36ab^2+12b^3 = 6a^3+35a^2b+47ab^2+12b^3}}$
 c) $\underline{\underline{(a+b)(c-d)(e-f) = (ac-ad+bc-bd)(e-f) = ace - acf - ade + adf + bce - bcf - bde + bdf}}$
 d) $\underline{\underline{(2a+3b)(a-4b)(3a-b) = (2a^2-8ab+3ab-12b^2)(3a-b) = 6a^3-2a^2b-24a^2b+8ab^2+9a^2b-3ab^2-36ab^2+12b^3 = 6a^3-17a^2b-31ab^2+12b^3}}$

20. Multipliziere aus und zähle soweit wie möglich zusammen !

- a) $\underline{\underline{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}}$
- b) $\underline{\underline{(a+b-c)(a+b+c) = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc - ac - bc - c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - c^2}}$
- c) $\underline{\underline{(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc}}$
- d) $\underline{\underline{(a+b-c)(a-b+c) = a^2 - ab + ac + ab - b^2 + bc - ac + bc - c^2 = a^2 - b^2 + 2bc - c^2}}$
- e) $\underline{\underline{(2u-5v+w)^2 = 4u^2 + 25v^2 + w^2 - 20uv + 4uw - 10vw}}$
- f) $\underline{\underline{(5a+3b)^2 - (5a-3b)^2 = 25a^2 + 30ab + 9b^2 - (25a^2 - 30ab + 9b^2) = 60ab}}$

21. Berechne die folgenden Ausdrücke mit dem Pascalschen Dreieck und mit normalem Ausmultiplizieren. Vergleiche danach die Resultate !

- a) $\underline{\underline{(a+b)^3 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}}$
 Mit dem pasc. Dreieck: $\underline{\underline{(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}}$
- b) $\underline{\underline{(a+b)^4 = (a+b)^2(a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)^2 = a^4 + 4a^2b^2 + b^4 + 4a^3b + 2a^2b^2 + 4ab^3 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}}$
 Mit dem pasc. Dreieck: $\underline{\underline{(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4}}$

20. Ein polierter Stahlwürfel sollte eine Kantenlänge von exakt 80mm haben. Eine genaue Nachmessung ergibt aber, dass jede Kante um einen Hundertstelmillimeter zu lang geworden ist. Um wie viele Kubikmillimeter ist das Volumen, um wie viele Quadratmillimeter die Würfeloberfläche zu gross ?

- Exaktes Volumen: $(80)^3 = 512000$
- effektives Volumen: $(80.01)^3 = (80 + 0.01)^3 = 512000 + 3 \cdot 64 + 3 \cdot 0.008 + 0.000001 = 512192.024001$
- \Rightarrow Die Abweichung beträgt 192.024001 mm³
- Exakte Oberfläche: $6 \cdot 80^2 = 38400$
- effektive Oberfläche: $6 \cdot 80.01^2 = 6 \cdot (80 + 0.01)^2 = 6(6400 + 1.6 + 0.0001)$
- Die Abweichung beträgt: $6 \cdot 1.6 + 6 \cdot 0.0001 = 9.6 + 0.0006 = \underline{\underline{9.6006}}$