

3.3 Kombinatorik

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Die Produktregel	2
3	Probleme, bei denen die Reihenfolge berücksichtigt wird	3
3.1	Erster Aufgabentyp-mit Wiederholung	3
3.2	Zweiter Aufgabentyp-ohne Wiederholung	4
4	Probleme, bei denen die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird-erster Aufgabentyp-ohne Wiederholung	6
5	vermischte Aufgaben zu den obenstehenden Aufgabentypen	8
6	Aufgaben, die sich aus den obenstehenden Aufgabentypen zusammensetzen	9
6.1	Typ 1-Dividieren	9
6.2	Typ 2-Produktregel	9
7	Probleme, bei denen die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird-zweiter Aufgabentyp-mit Wiederholung	12

1 Einführung

Im Wort Kombinatorik steckt das Wort Kombination, welches aus dem Alltag geläufig ist:

- Ein Schachspieler löst Schachkombinationen (Schachprobleme).
- Eine Person hat ihre Kleider gut miteinander kombiniert.
- Eine Farbkombination ist gut gewählt.
- Die Sportart „Nordische Kombination“ (Skispringen und Langlauf)

Der Begriff Kombination wird im Alltag also benutzt, wenn verschiedene Dinge miteinander kombiniert werden. Wird eine Verbindung passend gewählt, dann hat man gut kombiniert.

Der Alltagsbegriff hat mit dem mathematischen Begriff gewisse Gemeinsamkeiten. Man spricht in der Mathematik von Kombinationen im Zusammenhang mit Zählproblemen, allerdings nur bei einer bestimmten Sorte. Beispiele für Zählprobleme sind:

- Auf wieviele verschiedene Arten kann ich mich anziehen, wenn ich drei Paar Schuhe, vier Paar Hosen und 5 Hemden habe ?
- Wieviele Ziehungen sind beim Lottospiel möglich ?

Wir werden nun in den folgenden Abschnitten die verschiedenen Kategorien von Zählproblemen kennenlernen.

2 Die Produktregel

Einführungsaufgabe:

In einem französischen Restaurant werden bei einem Menü mit 4 Gängen Auswahlmöglichkeiten angeboten: zuerst ein Salat oder eine Suppe, anschliessend 4 verschiedene Vorspeisen, 3 Hauptspeisen und 5 Desserts.

- Wie viele Bestellmöglichkeiten gibt es für die ersten beiden Gänge ?

13	15
14	16

17	19
18	20

21	23
22	24

- a) Wie viele Sitzanordnungen sind möglich, wenn die Personen zusammen in einem Abteil sitzen? [144]
- b) Wie viele Sitzanordnungen sind möglich, wenn sich jede Person ihr eigenes Abteil nimmt? [92160]
- c) Wie viele Sitzanordnungen sind möglich, wenn sich je zwei Schülerinnen (deren Zusammensetzung bestimmt ist) in ein eigenes Abteil setzen? [4320]

Der obige Aufgabentyp ist dermassen häufig anzutreffen, dass zur Vereinfachung der Schreibweise eigene Symbole entwickelt wurden. Wir haben als Ergebnis z.B. $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ oder $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ erhalten. Es können lange Terme entstehen oder riesig grosse Zahlen, wenn diese Terme ausgerechnet werden. Solche Terme wollen wir nun abgekürzt schreiben:

Definition 1 Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

Beispiele:

- $3! =$
- $5! =$

Übungen

8. Berechne ohne Taschenrechner:

a) $12! : 9! =$

b) $75! : 74! =$

c) $\frac{8! + 9!}{8!}$

d) $\frac{99!}{99! + 100!}$

9. Fülle die Lücken aus.

a) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \frac{\dots!}{\dots!}$

b) $80 \cdot 79 \cdot \dots \cdot 68 = \frac{\dots!}{\dots!}$

10. Schreibe die folgenden Terme als Fakultäten (d.h. mit einem !).

a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$

b) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1)$

11. Vereinfache den Term jeweils soweit wie möglich.

a) $\frac{n!}{n(n-1)}$

b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

12. Wieviel „Wörter“ bestehend aus sieben Buchstaben, kann eine Computer aufschreiben, wenn das Alphabet 26 Buchstaben hat und kein Buchstabe mehrfach auftreten darf (schreibe Dein Ergebnis mit (einer) Fakultät(en)) ?

4 Probleme, bei denen die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird-erster Aufgabentyp-ohne Wiederholung

Der Fachbegriff für diesen Aufgabentyp: **Kombinationen ohne Wiederholung**.

Einführungsaufgabe:

Ein Schüler hat fünf ungelesene Bücher (Goethe, Mann, Hesse, Dürrenmatt, Frisch), von denen er drei mit in den Urlaub nehmen will. Wie viele Möglichkeiten hat er? Als Hilfe sind unten schon mal alle möglichen Dreierkonstellationen aufgelistet:

GMH	MGH	HGM	DGM	FGM
GMD	MGD	HGD	DGH	FGH
GMF	MGF	HGF	DGF	FGD
GHM	MHG	HMG	DMG	FMG
GHD	MHD	HMD	DMH	FMH
GHF	MHF	HMF	DMF	FMD
GDM	MDG	HDG	DHG	FHG
GDH	MDH	HDM	DHM	FHM
GDF	MDF	HDF	DHF	FHD
GFM	MFG	HFG	DFG	FDG
GFH	MFH	HFM	DFM	FDM
GFD	MFD	HFD	DFH	FDH

Übungen

13. Gegeben sei die Menge $\{a, b, c, d, e, f\}$. Wie viele 4-elementige Teilmengen hat diese Menge? [15]
14. Ein Mini-Lottospiel besteht aus 5 Kugeln (von 1 bis 5 nummeriert), von denen 3 gezogen werden. Wie viele verschiedene Gewinnkombinationen gibt es? [10]
15. In einem Raum befinden sich 7 Personen, die gegenseitig auf das neue Jahr anstossen. Wie oft klingen die Gläser? [21]
16. 5 weiße und 3 schwarze Kugeln sollen auf 8 Plätze gelegt werden. Wie viele Anordnungsmöglichkeiten gibt es? [56]

Auch der obige Aufgabentyp kommt sehr häufig vor, weshalb für Terme wie $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ ebenfalls ein eigenes Symbol entwickelt wurde.

Wir definieren:

Definition 2 Für $n, k \in \mathbb{N}, n \geq k$ definieren wir:
$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}$$

Beispiele:

5 vermischte Aufgaben zu den obenstehenden Aufgabentypen

21. Auf einem Parkplatz sind noch 6 Parkplätze frei. Gleichzeitig kommen
- 3 unterscheidbare Autos an.
 - 3 nicht unterscheidbare Autos an.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es, die freien Parkplätze den ankommenden Autos zuzuteilen ? [120,20]
22. In einem Schachturnier mit 10 Teilnehmern spielt jeder gegen jeden einmal. Wie viele Partien werden gespielt ? [45]
23. Bei einem Klassenlager werden 6 Schüler aus einer Klasse von 20 Schülern für Arbeiten in der Küche benötigt. Wie viele Auswahlmöglichkeiten gibt es ? [38760]
24. Ein Hotel hat 10 freie Zimmer. Am Abend kommen 7 Personen an, die alle ein Einzelzimmer belegen möchten. Auf wie viele Arten können die 7 Personen auf die Zimmer verteilt werden ? [604800]
25. Wie viele 5-stellige
- Zahlen mit lauter ungeraden Ziffern gibt es ? [3125]
 - Zahlen mit lauter verschiedenen Ziffern gibt es ? [27216]
 - Zahlen mit lauter verschiedenen ungeraden Ziffern gibt es ? [120]
 - Zahlen mit lauter geraden Ziffern gibt es ? [2500]
 - gerade Zahlen gibt es ? [45000]
 - Zahlen mit lauter verschiedenen geraden Ziffern gibt es ? [96]
26. Im Schweizer Lottospiel werden aus 45 Kugeln sechs gezogen.
- Wie viele verschiedene Gewinnkombinationen gibt es ? [8145060]
 - Wie viele verschiedene Gewinnkombinationen gäbe es, wenn die Reihenfolge berücksichtigt würde ? $[\approx 5.86 \cdot 10^9]$
27. Urs warf eine Münze 30-mal. Dabei erhielt er 18-mal Kopf. Wie viele verschiedene Sequenzen der Länge 30 enthalten genau 18-mal Kopf ? $[8.64 \cdot 10^7]$
28. Ein Kartenspiel enthält 36 verschiedene Karten. Spieler Klaus erhält 9 Karten. Ein solcher Satz Karten heiße ein Blatt. Wie viele Blätter sind möglich ? [94143280]
29. Beim Kegeln gilt es, mit einer Kugel möglichst viele Kegel umzuwerfen.
- Wie viele Wurfbilder mit vier gefallenem Kegeln gibt es theoretisch ?
 - Wie viele Wurfbilder mit 3 stehen gebliebenen Kegeln gibt es theoretisch ?
 - Wie viele Wurfbilder sind insgesamt theoretisch möglich ?
- [126,84,512]
30. Wie viele Mitglieder zählt eine Klasse, in der es theoretisch 253 Auswahlmöglichkeiten für zwei Klassendelegierte gibt ? [23]

6 Aufgaben, die sich aus den obenstehenden Aufgabentypen zusammensetzen

6.1 Typ 1-Dividieren

Wie viele „Wörter“ lassen sich mit den Buchstaben des Wortes OTTO bilden, wie kann man diese Möglichkeiten berechnen ?

Wie viele „Wörter“ lassen sich mit den Buchstaben des Wortes OTTTO bilden, wie kann man diese Möglichkeiten berechnen ?

Übungen

31. Wie viele „Wörter“ lassen sich mit den Buchstaben des Wortes MISSISSIPPI bilden ? [34650]
32. Wir haben 4 rote, 3 schwarze und 2 weiße Kugeln, die sich nur in ihrer Farbe unterscheiden lassen. Auf wie viele Arten können diese Kugeln auf 9 Plätze gesetzt werden ? [1260]

6.2 Typ 2-Produktregel

Einführungsaufgabe

Ein Kilometerzähler besteht aus fünf Stellen. An jeder Stelle kann eine der Ziffern von 0-9 stehen.

- Wie viele Kilometerstände sind möglich, wenn keine Zwei vorkommen darf ?
- Wie viele Kilometerstände sind möglich, wenn genau eine Zwei vorkommen muss ?
- Wie viele Kilometerstände sind möglich, wenn genau zwei Zweien vorkommen müssen ?
- Wie viele Kilometerstände sind möglich, wenn genau drei Zweien vorkommen müssen ?
- Wie viele Kilometerstände sind möglich, wenn genau vier Zweien vorkommen müssen ?
- Wie viele Kilometerstände sind möglich, wenn genau fünf Zweien vorkommen müssen ?
- Wie viele Kilometerstände sind insgesamt möglich ? Siehst Du einen Zusammenhang zwischen den ersten sechs und der letzten Teilaufgabe ?

Übungen

33. Wie viele Zahlenkombinationen mit genau zwei richtigen Zahlen sind beim Schweizer Lotto möglich ? [1233765]
34. Ein Verein von 20 Frauen und 16 Männern bildet eine Kommission mit 5 Frauen und 4 Männern. Wie viele Möglichkeiten gibt es dazu ? [28217280]
35. Jemand zieht 9 Karten auf einem Stapel von 36 Karten (Schweizer Jasskarten: 4 Asse, 4 Könige, 4 Damen, 4 Buben, 4 Zehner, 4 Neuner, 4 Achter, 4 Siebner und 4 Sechser). Diese 9 Karten nennen wir ein Blatt, wobei die Reihenfolge, in der die Karten gezogen wurden, keine Rolle spielt.
- a) Wie viele Blätter mit genau 4 Buben sind möglich? [201376]
- b) Wie viele Blätter mit genau 2 Buben und 2 Damen sind möglich? [3538080]
36. Beim Spiel MasterMind geht es darum, 4 Stifte (10 verschiedene Farben) in 4 Löcher zu stecken (z.B. grüner Stift ins 1.Loch, gelber Stift ins 2.Loch, grüner Stift ins 3.Loch, blauer Stift ins 4.Loch). Dabei wird die Reihenfolge berücksichtigt (d.h. „erstes Loch Gelb und zweites Loch Grün“ wird unterschieden von „erstes Loch Grün und zweites Loch Gelb“)
- a) Auf Wie viele Arten ist das möglich (Eine Farbe darf beliebig oft vorkommen) ? [10000]
- b) Auf Wie viele Arten ist das möglich, wenn eine Farbe höchstens 1 Mal vorkommen darf? [5040]
- c) Wie viele Konstellationen sind möglich, wenn genau eine Farbe genau 2 Mal vorkommen muss? [4320]
37. Ein Pokerspiel besteht aus 52 Karten. Es werden nun fünf Karten gezogen. Wie viele Blätter mit
- a) einem Doppelzwilling (z.B. Herz-Vier, Kreuz-Vier, Herz-Bube, Pik-Bube, Pik-Dame) sind möglich ? [123552]
- b) Full House (Drilling und Zwilling) sind möglich ? [3744]
- c) genau einem Zwilling sind möglich ? [1098240]
38. Acht Schüler wollen in einer Halle Fussball spielen. Wie viele Einteilungen in zwei Vierer-Mannschaften sind denkbar ? [35]
39. Wie viele fünfstellige Zahlen gibt es, wenn
- a) keine Eins vorkommen darf ?
- b) genau eine Eins vorkommen muss ?
- c) genau zwei Einsen vorkommen müssen ?
- d) genau drei Einsen vorkommen müssen ?
- e) genau vier Einsen vorkommen müssen ?
- f) genau fünf Einsen vorkommen müssen ?
- g) es keine Einschränkung gibt ? Kannst Du einen Zusammenhang zwischen den Aufgaben a)-e) und f) herstellen ?

7 Probleme, bei denen die Reihenfolge nicht berücksichtigt wird-zweiter Aufgabentyp-mit Wiederholung

Der letzte Aufgabentyp, den wir betrachten, heisst **Kombinationen mit Wiederholung**. Es ist der schwierigste Aufgabentyp. In einem Säcklein befinden sich 9 Zettel. Dieses enthält 3 Zettel mit einer 1, 3 Zettel mit einer 2 und 3 Zettel mit einer 3. Es werden nun 3 Zettel gezogen. Wie viele Zahlenkombinationen können gezogen werden, wenn die Reihenfolge keine Rolle spielt ? [10]

- Schreibe alle möglichen Zahlenkombinationen auf.

- Wir können die Möglichkeiten wie z.B. 123, 112, 133 mit Punkten und Strichen darstellen. Drei Beispiele sind aufgeführt, versuche die ganze Tabelle auszufüllen.

111	112	113							
...							

- Wir können nun die Frage stellen: Auf Wie viele Arten können wir die Punkte und Striche anordnen ?

- Angenommen, im Säcklein befinden sich 30 Zettel, davon 5 Zettel mit einer 1, 5 Zettel mit einer 2, 5 Zettel mit einer 3, 5 Zettel mit einer 4, 5 Zettel mit einer 5 und 5 Zettel mit einer 6. Es werden nun 4 Zettel gezogen. Wie viele Zahlenkombinationen sind möglich ? [126]

Übungen

40. Wie viele Möglichkeiten gibt es, sieben (nicht voneinander unterscheidbare) Haselnüsse in drei verschiedenfarbige Teller zu legen ? [36]
41. In eine 12-er Harasse können vier verschiedene Getränkesorten eingefüllt werden (Citro, Cola, Himbo, Süssmost). Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Harasse ganz mit Getränken zu füllen ? Der Platz in der Harasse spielt keine Rolle. Ein Beispiel: 4 Flaschen Citro, 3 Flaschen Cola, 1 Flasche Himbo, 4 Flaschen Süssmost oder 12 Flaschen Cola, [455]

42. Ein Würfel wird dreimal geworfen. Wieviele Wurfbilder sind möglich,
- a) wenn die Reihenfolge der Zahlen berücksichtigt wird (z.B. 311 wird unterschieden von 131) ? [216]
 - b) wenn die Reihenfolge der Zahlen nicht berücksichtigt wird (z.B. 311 ist gleich wie 131) ? [56]
43. Es werden drei Pokerspiele (je 52 Karten) zusammengemischt und dann drei Karten gezogen. Wieviele Blätter sind möglich ? [24804]