

1.8 lineare Optimierung

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung des Begriffs „lineare Optimierung“	2
2	Das Planungspolygon	2
3	Die Optimierungsgerade	3

1 Einführung des Begriffs „lineare Optimierung“

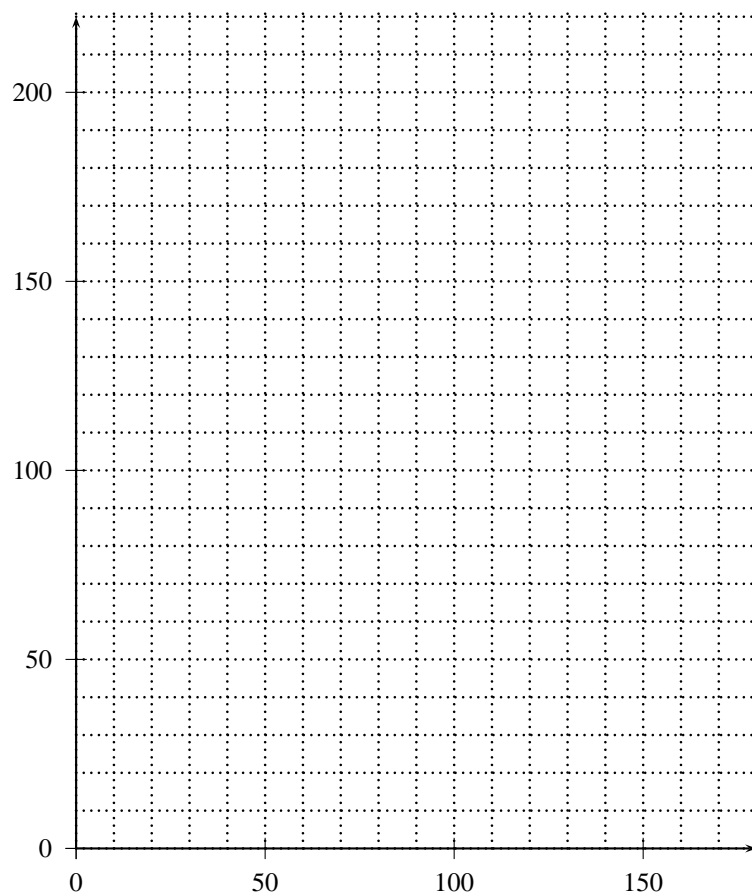
Der Titel dieses Skriptes besteht aus zwei Wörtern, linear und Optimierung. Linear, weil wir beim Lösen der Aufgaben nur lineare Gleichungen erhalten werden. Das Wort Optimierung heisst übersetzt „das Beste“. Mögliche Fragestellungen: Der Gewinn soll so gross wie möglich sein, die Arbeitskosten so niedrig wie möglich, die Belastung so niedrig wie möglich, usw.

2 Das Planungspolygon

Eine Aufgabe aus der linearen Optimierung lösen wir immer in zwei Teilen, wobei im ersten Teil das **Planungspolygon** gezeichnet wird.

Aufgabe Die Einkäuferin eines Modegeschäfts bestellt bei einem Grosshändler Mäntel und Jacken. Es sollen zwischen 20 und 100 Mäntel und zwischen 30 und 120 Jacken sein. Der Einkaufspreis liegt für einen Mantel bei 200Fr und für eine Jacke bei 160Fr. Der Einkäuferin stehen 32000Fr zur Verfügung.

- Zeichne das Planungspolygon.



- Wenn sie 100 Mäntel gekauft hat, wieviele Jacken kann sie dann höchstens noch kaufen ?
- Wenn sie 80 Mäntel gekauft hat, wieviele Jacken kann sie dann höchstens noch kaufen ?

Übung

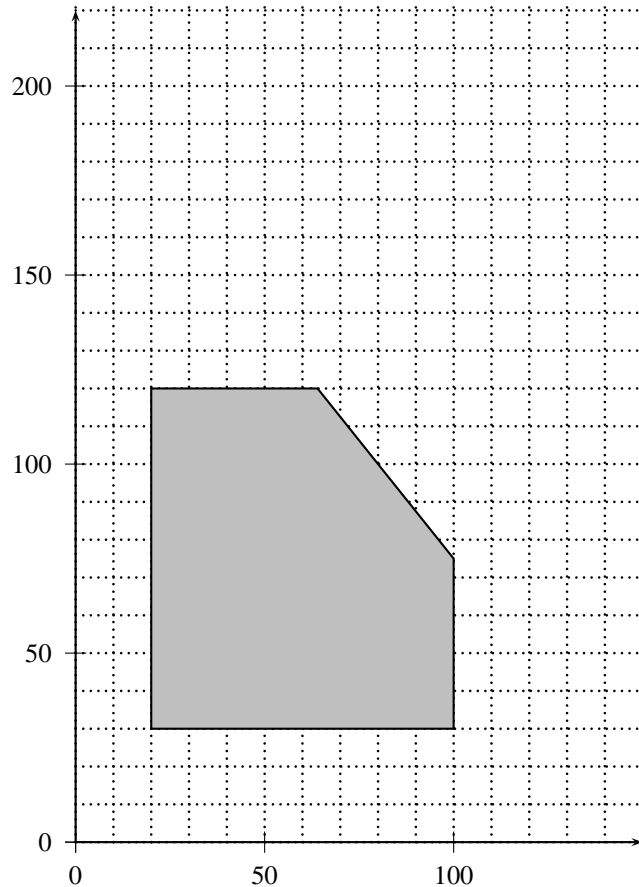
1. Eine Raffinerie bezieht Erdöl von zwei Lieferfirmen L_1 und L_2 . Sie kann höchstens 500t Erdöl am Tag verarbeiten. Aufgrund langfristiger Lieferverträge muss sie von L_1 täglich 50t, von L_2 täglich 80t abnehmen. L_1 und L_2 können jedoch täglich nicht mehr als 400t bzw. 200t liefern.
 - a) Zeichne das Planungspolygon.
 - b) Wenn 350t Erdöl von L_1 gekauft wurden, wieviele Tonnen können dann maximal von der zweiten Firma gekauft werden ?
 - c) Wenn 150t Erdöl von L_2 gekauft wurden, wieviele Tonnen können dann maximal von der ersten Firma gekauft werden ?

3 Die Optimierungsgerade

Nehmen wir noch einmal die Aufgabe aus dem vorderen Abschnitt, diesmal aber mit einer erweiterten Fragestellung.

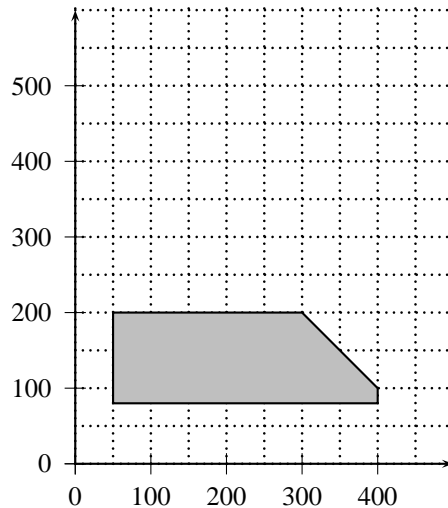
Aufgabe Die Einkäuferin eines Modegeschäfts bestellt bei einem Grosshändler Mäntel und Jacken. Es sollen zwischen 20 und 100 Mäntel und zwischen 30 und 120 Jacken sein. Der Einkaufspreis liegt für einen Mantel bei 200Fr und für eine Jacke bei 160Fr. Der Einkäuferin stehen 32000Fr zur Verfügung. **Sie geht davon aus, dass beim Verkauf eines Mantels 150Fr und beim Verkauf einer Jacke 100Fr Gewinn erzielt werden. Wieviele Mäntel und Jacken kauft sie ein, um einen möglichst hohen Gewinn zu erzielen ?**

[100 Mäntel, 75 Jacken]



Übungen

2. Eine Raffinerie bezieht Erdöl von zwei Lieferfirmen L_1 und L_2 . Sie kann höchstens 500t Erdöl am Tag verarbeiten. Aufgrund langfristiger Lieferverträge muss sie von L_1 täglich 50t, von L_2 täglich 80t abnehmen. L_1 und L_2 können jedoch täglich nicht mehr als 400t bzw. 200t liefern. **Der Gewinn bei der Verarbeitung von 1t Erdöl beläuft sich auf 40Fr bzw. 50Fr bei den beiden Sorten. Bei welchen Verarbeitungsmengen wird der Gewinn maximal ?** (Das Planungspolygon ist schon gezeichnet) [300t L_1 , 200t L_2]



3. Ein Baustoffhändler beliefert eine Baustelle mit Kalk (1 Sack wiegt 35kg) und Zement (1 Sack wiegt 50kg). Sein LKW kann höchstens 3t laden. Die Baustelle braucht mindestens halb und höchstens doppelt so viel Zement wie Kalk.
- Für einen gelieferten Sack Kalk erhält der Händler 2Fr, für einen gelieferten Sack Zement 4Fr. Wie muss der LKW beladen werden, damit die Lieferung einen möglichst hohen Gewinn abwirft ? [22 Säcke Kalk, 44 Säcke Zement]
 - Wie muss der LKW beladen werden, damit möglichst viele Säcke transportiert werden ? [50 Säcke Kalk, 25 Säcke Zement]
4. Ein Landwirt besitzt 100 ha Land. Einen Teil will er mit Kartoffeln bepflanzen, einen anderen mit Getreide. Ausserdem sind die folgenden Informationen gegeben:

	Kartoffeln	Getreide	zur Verfügung
Anbaukosten in Geldeinheiten pro ha	10	20	1100
Arbeitszeit in Zeiteinheiten pro ha	1	4	160
Ertrag pro ha	400	1200	

Wie muss der Landwirt den Anbau organisieren, um einen möglichst grossen Ertrag zu erzielen ? [60 Ha Kartoffeln, 24 Ha Getreide]

5. Die Mitglieder einer Expedition benötigen für den geplanten Funkverkehr Batterien. Die beiden Sorten A und B kommen dafür in Frage. Die Menge der Batterien wird nun nach verschiedenen Gesichtspunkten eingeschränkt: Der verfügbare Raum für die Batterien ist 7 Liter, das Gesamtgewicht ist auf 8kg zu beschränken, dazu sollen die Kosten 12 Einheiten nicht überschreiten. Die Hersteller machen folgende Angaben über die beiden Typen:

Für eine Batterie	Typ A	Typ B
Volumen in Liter	1	1
Gewicht in kg	2	1
Preis in Einheiten	4	1
Betriebsdauer in Tagen	8	3

Wieviel von jeder Sorte müssen die Mitglieder mit auf die Expedition nehmen, wenn die Gesamtbetriebsdauer möglichst gross sein soll ?

6. Eine Kosmetikfirma produziert zwei Sorten Badeöle A und B. Jedes Badeöl wird aus drei Zwischenprodukten zusammengesetzt, die von drei Automaten A_1, A_2 und A_3 hergestellt werden. Die Tabelle zeigt die Einsatzzeiten für jeden Automaten (Jeder Automat kann täglich höchstens 6 Stunden benutzt werden).

Automat	Zeit pro Liter Badeöl in Min. von A	Zeit pro Liter Badeöl in Min. von B
A_1	4.5	3
A_2	4	4
A_3	1.5	6

Wieviel Liter von A und B wird man täglich herstellen, wenn der Gewinn pro Liter 15Fr bei A und 20Fr bei B beträgt und der Gesamtgewinn maximal sein soll ? [45 l von A, 50 l von B]

7. Ein Automobilwerk stellt zwei Wagentypen A und B her. Vom Typ A können täglich maximal 600 Stück fertiggestellt werden, vom Typ B maximal 300 Stück, wegen Mangel an Personal jedoch nicht mehr als 750 Stück insgesamt. Der Reingewinn für einen Wagen vom Typ A beträgt durchschnittlich 2400Fr, für einen Wagen vom Typ B 3600Fr. Wieviele Wagen werden täglich von jedem Typ produziert, wenn der Reingewinn maximal werden soll ? Wie gross ist dieser Reingewinn ? [450 Autos vom Typ A, 300 Autos vom Typ B, $Z_{max} = 2160000$ Fr]

8. Eine Architektengemeinschaft will ein 30000m^2 grosses Stück Land mit Einfamilienhäusern und Mehrfamilienhäusern überbauen. Der Platzbedarf für ein Einfamilienhaus samt Umschwung beträgt 500m^2 , für ein Mehrfamilienhaus 2000m^2 . Die Baukosten für ein Einfamilienhaus betragen einschliesslich Landerwerb 750000Fr, diejenigen für ein Mehrfamilienhaus 2000000Fr. Die Architektengemeinschaft will höchstens 36 Millionen Franken in das ganze Vorhaben investieren. Beim Verkauf der Häuser verrechnen die Architekten ihre Eigenleistungen folgendermassen: 36000 Franken für ein Einfamilienhaus und 120000 Franken für ein Mehrfamilienhaus. Wieviele Häuser welchen Typs wird die Architektengemeinschaft bauen, wenn sie möglichst hohe Einnahmen erzielen will ?

9. Eine Papierfabrik stellt Papierrollen der Standardbreite 200cm her. Es stehen zwei Maschinen zur Verfügung, die eine solche Rolle folgendermassen in kleinere Rollen zerschneiden:
- Maschine I: 1 Rolle à 70cm, 2 Rollen à 50cm, 1 Rolle à 30cm Breite
 - Maschine II: 1 Rolle à 50cm, 5 Rollen à 30cm Breite

Ein Kunde bestellt 15 Rollen à 70cm, 60 Rollen à 50cm und 75 Rollen à 30cm Breite. Wieviele Rollen der Standardbreite lässt man zerschneiden, wenn insgesamt möglichst wenig Rollen zerschnitten werden sollen [Ma I: 25, Ma II, 10]

10. Ein Kaffeehändler besitzt Vorräte von 3 Kaffeesorten. Er will zwei Mischungen in Paketen von je 1 Kilogramm verkaufen.

	1.Sorte	2.Sorte	3.Sorte
Mischung A	300 g	200 g	500 g
Mischung B	400 g	400 g	200 g
Vorrat	360kg	320kg	390kg

Ein Paket der Mischung A kostet 12 Franken, eines der

Mischung B 18 Franken. Wieviele Pakete von jeder Mischung wird der Händler abfüllen, wenn er

- a) möglichst viele Pakete verkaufen will ? Mit welchen Einnahmen rechnet er somit ?
- b) möglichst hohe Einnahmen erzielen will ? Wie gross sind sie ?
11. Ein Privatmann besitzt einen Gutschein einer Weinhandlung im Wert von 850 Franken. Er möchte damit Weisswein und Rotwein kaufen. Eine Flasche Weisswein kostet 11 Franken, eine Flasche Rotwein 14 Franken. Die Anzahl Flaschen einer Sorte soll höchstens um 25 von der Anzahl Flaschen der anderen Sorte abweichen ? Wieviele Flaschen jeder Sorte kauft er ein, wenn er
- a) insgesamt möglichst viele Flaschen erwerben will ? [48 Fl. WW, 23 Fl. RW]
- b) möglichst viele Rotweinflaschen erwerben will ? [20 Fl. WW, 45 Fl. RW]
12. Ein Montagewerk beschäftigt gelernte Arbeiter und Lehrlinge. Ein störungsfreier Ablauf erfordert, dass mindestens 120 Arbeitsplätze besetzt sind; andererseits sind maximal 150 Arbeitsplätze verfügbar. Mindestens ein Fünftel aller Stellen ist durch Lehrlinge zu besetzen; die Anzahl Lehrlinge soll aber mindestens um 20 kleiner sein als die Anzahl gelernter Arbeiter.
- a) Wieviele Arbeiter kann das Werk maximal beschäftigen ? [120 Arbeiter]
- b) Wieviele Lehrlinge kann das Werk maximal beschäftigen ? [65 Arbeiter]
- c) Ein Arbeiter verdient 4500 Franken im Monat, ein Lehrling 1000 Franken. Wieviele Arbeiter und Lehrlinge wird die Firma einstellen, wenn die Lohnsumme möglichst klein sein soll ? [70 Arbeiter und 50 Lehrlinge]