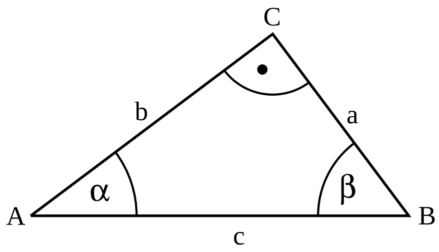
1.6 Trigonometrie

Inhaltsverzeichnis

1 Seitenverhältnisse beim rechtwinkligen Dreieck

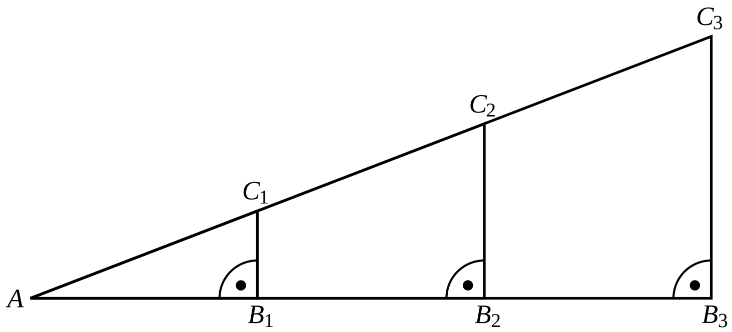
Das Wort Trigonometrie kommt aus dem griechischen: trigonon heisst Dreieck und metron heisst Mass. Trigonometrie heisst also Dreiecksvermessung.

Wir befassen uns bei diesem Thema **nur mit rechtwinkligen Dreiecken** ΔABC mit den folgenden Bezeichnungen:



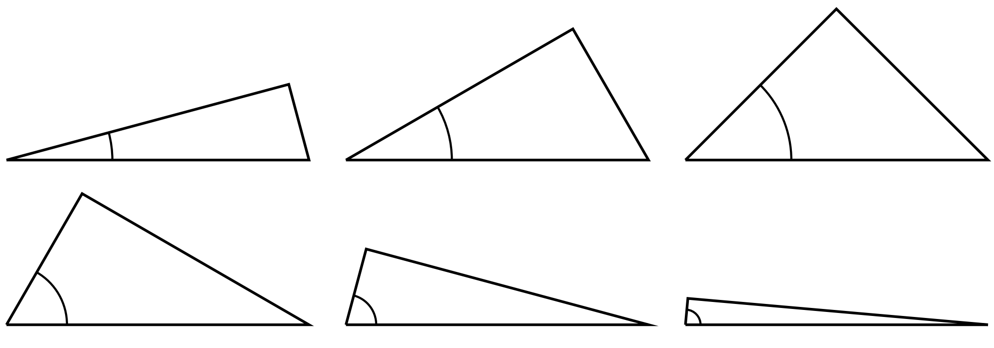
Einführungsaufgaben

1. Unten sind 3 Dreiecke mit gleichem Winkel α gezeichnet.



   a) Berechne mit einem Masstab das ungefähre Verhältnis $\overline{AB_1} : \overline{AC_1}$ (d.h. wenn z.B. $\overline{AB_1} = 2\,\text{cm}$ und $\overline{AC_1} = 4\,\text{cm}$, dann ist das Verhältnis $\overline{AB_1} : \overline{AC_1} = 0.5$).
   b) Berechne das Verhältnis $\overline{AB_2} : \overline{AC_2}$.
   c) Berechne das Verhältnis $\overline{AB_3} : \overline{AC_3}$.
   d) Was beobachtest Du bei den Aufgaben a) bis c) und was folgerst Du daraus ?

2. Unten sind 6 rechtwinklige Dreiecke mit den Winkeln $\alpha = 15^\circ, \alpha = 30^\circ, \alpha = 45^\circ, \alpha = 60^\circ, \alpha = 75^\circ$ und $\alpha = 85^\circ$ gezeichnet (α ist jeweils der eingezeichnete Winkel).



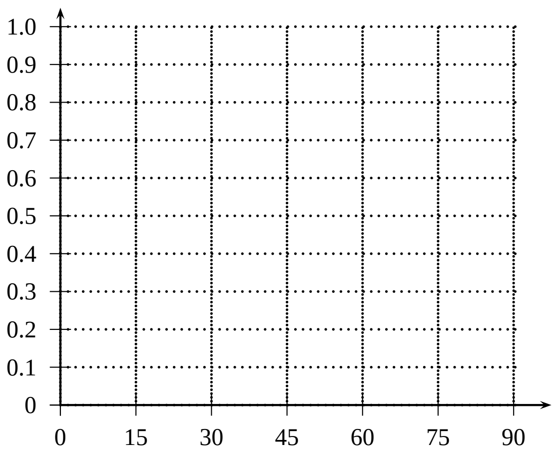
a) Berechne bei den oberen 6 Dreiecken jeweils den Wert des Verhältnisses $\overline{BC} : \overline{AB}$ durch Abmessung. Trage Deine Ergebnisse dann in die untenstehende Tabelle ein.

b) Berechne bei den oberen 6 Dreiecken jeweils den Wert des Verhältnisses $\overline{AC} : \overline{AB}$ durch Abmessung. Trage Deine Ergebnisse dann in die untenstehende Tabelle ein.

c) Berechne bei den oberen 6 Dreiecken jeweils den Wert des Verhältnisses $\overline{BC} : \overline{AC}$ durch Abmessung. Trage Deine Ergebnisse dann in die untenstehende Tabelle ein.

	15°	30°	45°	60°	75°	85°
$\overline{BC} : \overline{AB}$						
$\overline{AC} : \overline{AB}$						
$\overline{BC} : \overline{AC}$						

d) Wir wollen nun die Werte der Tabelle in den untenstehenden Graphen einzeichnen. Trage auf der x-Achse die Winkel in 15°-er Abständen ein, auf der y-Achse die Verhältnisse in 0.1-Abständen. Wähle dabei für jede Zeile der Tabelle eine andere Farbe.



e) Ändert sich etwas am Seitenverhältnis, wenn wir das Dreieck vergrössern, die Winkel aber gleich bleiben ?

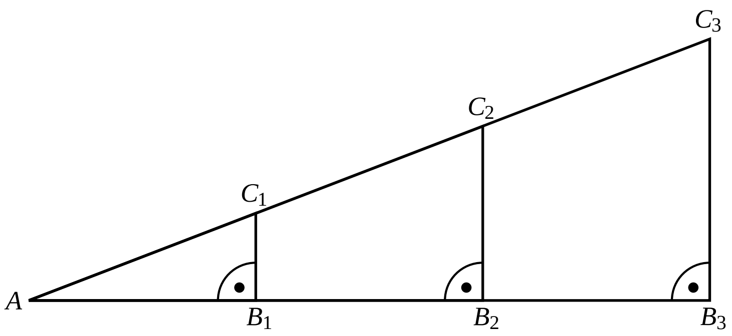
f) Welche Werte können wir erhalten ? Gibt es einen maximalen und einen minimalen Wert ?

g) Wenn wir ein Verhältnis zu einem Winkel wissen, können wir dann das Verhältnis zum doppelten Winkel herausfinden ?

h) Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck mit $\alpha = 15°$ und $c = 5\,\text{cm}$. Berechne mit Hilfe der oben erstellen Tabelle die Seite a. [$a \approx 1.29\,\text{cm}$]

2 Die trigonometrischen Funktionen

2.1 Was sind trigonometrischen Funktionen ?



Die Werte der Streckenverhältnisse

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AC_1}} = \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AC_2}} = \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AC_3}} = \frac{\overline{B_4C_4}}{\overline{AC_4}} = \ldots$$

oder

$$\frac{\overline{AB_1}}{\overline{B_1C_1}} = \frac{\overline{AB_2}}{\overline{B_2C_2}} = \frac{\overline{AB_3}}{\overline{B_3C_3}} = \frac{\overline{AB_4}}{\overline{B_4C_4}} = \ldots$$

sind von der Lage des Lotes $\overline{BC}$ unabhängig. Sie sind einzig und allein durch die Grösse des Winkels α bestimmt und ändern sich mit diesem.

Wir können einem Winkel **sein** Verhältnis zuordnen und umgekehrt einem Verhältnis den **dazugehörigen Winkel**. Beachte, dass diese Zuordnung **eindeutig** ist. In der Mathematik benutzt man für Zuordnungen den Begriff **Funktion**. Weil diese Zuordnung bei Dreiecken geschieht, sprechen wir von **trigonometrischen Funktionen**.

2.2 Bezeichnungen am rechtwinkligen Dreieck

Ein rechtwinkliges Dreieck besteht aus drei Seiten, eine davon ist die **Hypothenuse** (liegt dem rechten Winkel gegenüber), die anderen beiden sind die **Katheten**. Bei den Katheten unterscheiden wir neu zwischen **Gegenkathete und Ankathete**.

2.3 Die 6 trigonometrischen Funktionen

Ingesamt erhalten wir beim rechtwinkligen Dreieck 6 verschiedene Verhältniswerte, die folgendermassen benannt und definiert werden:

- $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \dfrac{a}{c}$
- $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \dfrac{b}{c}$
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \dfrac{a}{b}$
- $\cot(\alpha) = \dfrac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \dfrac{b}{a}$
- $\sec(\alpha) = \dfrac{\text{Hypothenuse}}{\text{Ankathete}} = \dfrac{a}{c}$
- $\operatorname{cosec}(\alpha) = \dfrac{\text{Hypothenuse}}{\text{Gegenkathete}} = \dfrac{a}{c}$

Die beiden letztgenannten Funktionen werden selten gebraucht.

Die $\sin, \cos$ und tan-Funktion finden wir auf dem Taschenrechner. Ist das Verhältnis bekannt, so können wir mit $\sin^{-1}, \cos^{-1}$ oder $\tan^{-1}$ den dazugehörigen Winkel berechnen. Z.B. ist $\sin(30°) = 0.5$ und $\sin^{-1}(0.5) = 30°$.

Beispiel

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck mit $a = 3\,\text{cm}$ und $\beta = 50°$. Berechne die übrigen Seiten und Winkel.

Übungen

3. Berechne die gesuchten Werte.

   a) $\sin 31° =$ [0.52] b) $\tan 27° =$ [0.51]

   c) $\cos\alpha = 0.34; \alpha =?$ [70.12°] d) $\tan\alpha = 2.5; \alpha =?$ [68.20°]

4. Das Verhältnis bei einem rechtwinkligen Dreieck zwischen AK (bezogen auf α) und H beträgt 0.32. Wie gross ist der Winkel α ? [$71.34°$]

5. Berechne die fehlenden Winkel und Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn $b = 2.4\,\text{cm}$ und $\alpha = 67°$ sind. [$a = 5.65\,\text{cm}, c = 6.14\,\text{cm}, \beta = 23°$]

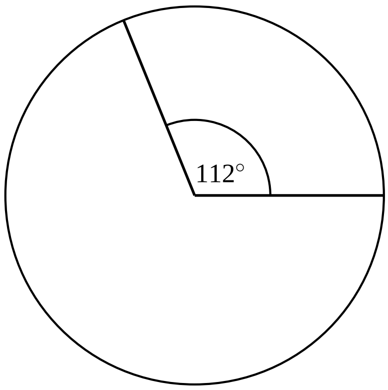
6. Aus einer Entfernung $e = 60\,\text{m}$ erblickt man die Spitze eines Turmes unter dem Höhenwinkel $\alpha = 27°$. Wie hoch ist der Turm, wenn die Augenhöhe $a = 1.5\,\text{m}$ beträgt ? [$32.07\,\text{m}$]

7. Welchen Flächeninhalt hat ein Parallelogramm (ein Viereck mit je zwei parallelen Seiten) mit

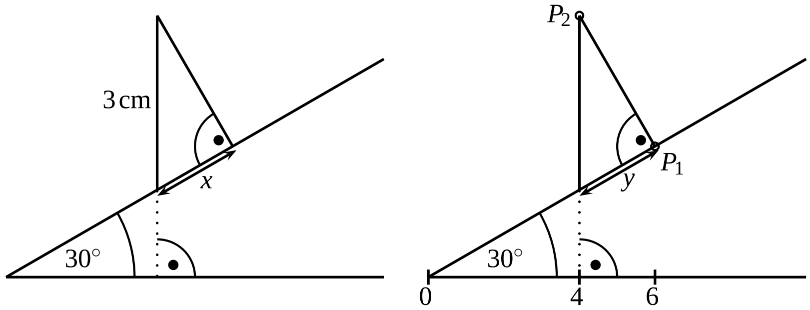
   a) $a = 8\,\text{cm}, d = 10\,\text{cm}, \alpha = 60°$ [$A = 69.28\,\text{cm}^2$]
   b) $a = 12.0\,\text{m}, b = 7.5\,\text{m}, \beta = 125°$ [$A = 73.72\,\text{m}^2$]

8. Wenn man aus einer Höhe von 11.2 m auf einen Fluss schaut, erscheint das weiter entfernte Ufer unter dem Tiefenwinkel $\alpha = 8°$. Wie breit ist der Fluss, wenn das Haus vom diesseitigen Ufer $e = 3.5\,\text{m}$ entfernt ist ? [$76.19\,\text{m}$]

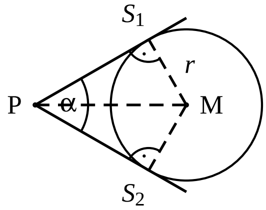
9. Ein Kreis hat den Radius $r = 3.2\,\text{cm}$ und den Mittelpunktswinkel $\alpha = 112°$. Berechne die Länge der dazugehörigen Sehne s. [$s = 5.3\,\text{cm}$]



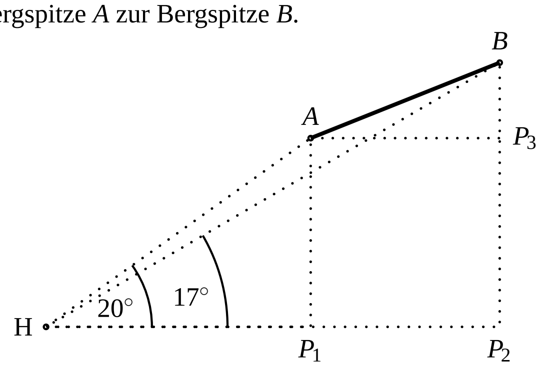
10. Berechne die Länge der Strecke x auf der linken Abbildung bzw. y und die Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 auf der rechten Abbildung. [$x = 1.5\,\text{cm}, y = 2.31, P_1(6|3.46), P_2(4|6.93)$]



11. Von einem Punkt P sind die Tangenten an den Kreis mit dem Mittelpunkt M und $r = 2.9\,\text{cm}$ gezeichnet. Dabei ist $\overline{MP} = 4\,\text{cm}$. Berechne den Winkel α, den die beiden Tangenten einschliessen. [$92.94°$]



12. Von einem Haus in einem Tal beobachtet man die Bergspitze B unter dem Höhenwinkel $\beta = 17°$, die Bergspitze A unter dem Höhenwinkel $\alpha = 20°$. Die Bergspitze A liegt 1376 m ü.M., Bergspitze B 1616 m ü.M. und das Haus 887 m ü.M, wobei die Spitzen auf der gleichen Seite des Hauses liegen. Das Haus, die Bergspitzen A und B bilden eine zur Erdoberfläche lotrechte Ebene. Berechne die Entfernung e von der Bergspitze A zur Bergspitze B. [$1068.24\,\text{m}$]



13. Berechne den Winkel, den die Raumdiagonale eines Würfels mit einer Kante einschliesst,

    a) wenn die Kantenlänge 10 cm beträgt. [$54.74°$]

    b) wenn die Kantenlänge beliebig ist. [$54.74°$]

14. Ein Quader hat die Kanten $a = 5\,\text{cm}, b = 4\,\text{cm}$ und $c = 3\,\text{cm}$. Berechne die Winkel α, β und γ, welche die Raumdiagonale des Quaders mit den Kanten a, b und c bildet. [$45°, 55.55°, 64.90°$]