1.3 Ungleichungen

(Thema aus dem Bereich Algebra)

Inhaltsverzeichnis

1 Ungleichungen

Ein paar Beispiele von Ungleichungen:

- $x < 5$
- $3x + 4 \leq 4$
- $(x + 4)(x + 5) \geq 3$

Definition 1 *Werden zwei Terme T_1 und T_2 durch $<, >, \leq$ oder $\geq$ miteinander verbunden, so entsteht eine Ungleichung: $T_1 < T_2, T_1 \leq T_2, T_1 > T_2$ oder $T_1 \geq T_2$.*

2 Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen

Unter einer Äquivalenzumformung einer Ungleichung verstehen wir eine Umformung, bei die Lösungsmenge der Ungleichung nicht verändert wird.

Bei den folgenden Äquivalenzumformungen wird das Ungleichheitszeichen **nicht gedreht**:

- Termumformungen (Ausmultiplizieren, Zusammenfassen, Vereinfachen)
- Auf beiden Seiten denselben Term addieren oder subtrahieren
- Beide Seiten mit derselben **positiven** Zahl (>0) multiplizieren oder divieren

Bei der folgenden Äquivalenzumformung wird das Ungleichheitszeichen **gedreht**:

- Beide Seiten mit derselben **negativen** Zahl (<0) multiplizieren oder durch dieselbe **negative** Zahl dividieren

Beispiel: $2x + 5 < 7x - 3$

Lösung:

Übungen

1. Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen in $\mathbf{R}$. Gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L} = \ldots$ an.

   a) $x+2.5 \leq -4$ $[\mathbf{L} = (-\infty, -6.5]]$

   b) $4+x \geq -2$ $[\mathbf{L} = [-6, \infty)]$

   c) $2x \leq -3.5x - 11$ $[\mathbf{L} = (-\infty, -2]]$

   d) $x > 2x+1$ $[\mathbf{L} = (-\infty, -1)]$

   e) $9-x > -0.5x+1$ $[\mathbf{L} = (-\infty, 16)]$

   f) $-\frac{3}{4}x < \frac{1}{2}x$ $[\mathbf{L} = (0, \infty)]$

   g) $\frac{5-2x}{3} < 0$ $[\mathbf{L} = (2.5, \infty)]$

   h) $(x+1)(x-3) > (x-4)^2$ $[\mathbf{L} = (19/6, \infty)]$

   i) $x^2 - 7 - (x-2)^2 \leq x-1$ $[\mathbf{L} = (-\infty, 10/3]]$

3 Spezielle Ungleichungen höheren Grades

Wir betrachten in diesem Abschnitt spezielle Ungleichungen, nämlich solche, die faktorisiert sind (wie schon bei den Gleichungen 2.Grades).

Beispiele von faktorisierten Ungleichungen 2.Grades

Solche Ungleichungen können wir nicht mit elementaren Zeilenumformungen lösen. Folgende Sätze helfen uns weiter:

Satz 1

Satz 2

Diese beiden Sätze brauchen wir, um die nachfolgenden Ungleichungen zu lösen.

Beispiel 1: $(x-3)(x+4) < 0$

Beispiel 2: $(2x-5)(3x+3) \geq 0$

Übungen

2. Kontrolliere Satz 1 und Satz 2 mit einem konkreten Beispiel.

3. Finde die Lösungsmenge in $\mathbf{R}$. Gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L} = \ldots$ an.

   a) $(2x+4)(x-1) > 0$ $[\mathbf{L} = (-\infty,-2)\cup(1,\infty)]$ b) $(x+1)(x-1) \geq 0$ $[\mathbf{L} = (-\infty,-1]\cup[1,\infty)]$

   c) $x(x+1) \leq 0$ $[\mathbf{L} = [-1,0]]$ d) $x^2+7x+12 < 0$ $[\mathbf{L} = (-4,-3)]$

   e) $x^2-x > 2$ $[\mathbf{L} = (-\infty,-1)\cup(2,\infty)]$

4. Bei dieser Aufgabe begegnen wir faktorisierten Ungleichungen, die sogar den Grad 3 haben. Finde die Lösungsmenge in $\mathbf{R}$ und gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L} = \ldots$ an.

   a) $(x+2)(x-1)(x+3) < 0$ $[\mathbf{L} = (-\infty,-3)\cup(-2,1)]$

   b) $(2x+1)(3x-3)(x+4) \geq 0$ $[\mathbf{L} = [-4,-0.5]\cup[1,\infty)]$

5. (Zusatz) Finde die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung in $\mathbf{R}$ und gib Dein Ergebnis in der Form $\mathbf{L} = \ldots$ an.

   a) $(x+2)(x-1)(x+3)(x+4) < 0$ $[\mathbf{L} = (-4,-3)\cup(-2,1)]$