1.2 Mengenlehre-Einführung in die reellen Zahlen

Inhaltsverzeichnis

1 Repetition **2**

2 Dezimalzahlen **3**

3 weitere irrationale Zahlen **4**

3.1 Zusatz: Der Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist 5

4 Intervalle **5**

Mengenlehre 1-Einführung in die reellen Zahlen

1 Repetition

Die Menge der **natürlichen Zahlen** kennen wir von der Primarschule her:

Die Menge der **ganzen Zahlen** besteht aus den natürlichen Zahlen, der Null und den natürlichen Zahlen mit dem Vorzeichen -:

Die Menge der rationalen Zahlen ist die („Menge aller Brüche “). Wir können sie folgendermassen notieren:

Die natürlichen und die ganzen Zahlen sind in den rationalen Zahlen enthalten, z.B. $3 = \frac{3}{1}$ und $-3 = \frac{-3}{1}$
Diese Zahlenmengen können wir auch graphisch darstellen:

Übungen

1. Wie gross sind z und n bei den folgenden Brüchen (s.oben) ?

   a) $\frac{3}{7}$ b) $-\frac{5}{2}$

   c) $2\frac{1}{3}$ d) 5

2. Gib eine rationale Zahl an, die zwischen den zwei gegebenen Zahlen liegt.

a) $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{20}$ und $\frac{1}{21}$

2 Dezimalzahlen

Dezimalzahlen kennen wir bereits. Beispiele dafür sind 2.234, 0.51 oder $3.\overline{2}$.

Wir definieren sie folgendermassen:

Definition 1 *Eine **Dezimalzahl** hat folgende Form:*

Wir unterscheiden 3 Sorten von Dezimalzahlen

- abbrechende Dezimalzahlen: Sie haben nur eine endliche Anzahl Dezimalstellen (z.B. 3.43, 0.121)
- periodische Dezimalzahlen: Eine bestimmte Ziffernfolge wiederholt sich ab einer bestimmten Stelle (z.B. $3.\overline{34}$, $0.1\overline{721}$).
- Alle Dezimalzahlen, die weder abbrechend noch periodisch sind.

Die Dezimalzahlen der dritten Sorte haben einen speziellen Namen:

Definition 2 *Eine Dezimalzahl, die weder abbrechend noch periodisch ist, heisst* .... *Zahl.*

Wir definieren nun eine neue Menge, die Menge der reellen Zahlen:

Definition 3 *Die Menge der reellen Zahlen **R** ist die Vereinigung der Menge der* ....

Zahlen und die Vereinigung der Menge der .... *Zahlen .*

Mit Mengendiagrammen können wir die reellen Zahlen folgendermassen darstellen:

Übungen

3. Stelle die folgenden Zahlen als Dezimalzahlen dar (schriftliche Division).

   a) 33:5 = b) 56:9 = c) 1:7 =

4. Ergänze den folgenden Satz mit Hilfe der vorherigen Aufgabe: Die Dezimalzahl (oder Dezimalzahldarstellung) eines Bruches ist

   entweder .... oder ....

5. Überlege Dir, ob folgende Aussage wahr ist (Aufgabe 2 hilft): „Für zwei beliebige Dezimalzahlen finden wir jeweils eine weitere, die dazwischen passt. “

6. Wenn wir alle Brüche auf der Zahlenachse markieren, bleiben dann noch Lücken (unmarkierte Stellen) übrig ?

7. Überprüfe, ob die folgenden Aussagen wahr sind !

   a) -2,5 ist eine ganze Zahl
   b) -1 ist eine natürliche Zahl
   c) $0,2\overline{56}$ ist eine rationale Zahl
   d) $2,23\overline{3}$ ist eine irrationale Zahl
   e) $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl

8. Sind die folgenden Zahlen rational oder irrational (Die Stellen nach dem Komma gehen mit dem gleichen Schema weiter) ?

   a) 3,245246244
   b) 0,123124123124.....
   c) 3,213214215216..... (nach der 9 kommt die 0)
   d) 4,10100100010000100000.....

9. Erfinde zwei irrationale Zahlen.

3 weitere irrationale Zahlen

Irrationalen Zahlen sind wir schon früher begegnet, einerseits bei der Kreisberechnung, andererseits beim Wurzelziehen.
Ein paar Beispiele:

- $\sqrt{2}$ ist irrational.
- $\sqrt{3}$ ist irrational.
- $\sqrt{5}$ ist irrational.
- Die Wurzel einer natürlichen Zahl, die keine Quadratzahl ist, ist irrational (Quadratzahlen: 1,4,9,...).

Euklid hat bereits in der Antike bewiesen, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. Der Beweis wird an der Prüfung nicht verlangt, für Interessierte ist er aufgeführt.

Bei der Kreisberechung sind wir der Zahl π begegnet, die ebenfalls irrational ist. Der Nachweis der Irrationalität ist allerdings viel schwieriger zu erbringen.

Übungen

10. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 = 2$

    a) in $\mathbf{Q}$.
    b) in $\mathbf{R}$.

11. Kann das Verhältnis zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises (U:d) exakt mit einer Dezimalzahl angegeben werden ?

3.1 Zusatz: Der Beweis, dass $\sqrt{2}$ irrational ist

Wenn wir $\sqrt{2}$ in den Taschenrechner eintippen erhalten wir das Ergebnis: 1,41421356... Sie scheint unendlich viele Stellen zu haben, dazu scheint keine Periodizität vorhanden zu sein. Wir können aber nicht sicher sein. Vielleicht hat die Zahl 100 Mio Stellen und bricht danach ab. Vielleicht wiederholt sie sich immer nach 10000 Stellen. Den Beweis, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist, hat Euklid gefunden:

- Wir nehmen an, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei p und q teilerfremd sind
- Quadrieren: $2 = \frac{p^2}{q^2}$
- Mit q^2 multiplizieren: $2q^2 = p^2 \Longrightarrow p^2$ ist eine gerade Zahl $\Longrightarrow p$ ist eine gerade Zahl.
- Weil p gerade ist, kann man schreiben: $p = 2r$
- Aus Schritt 3 wissen wir: $2q^2 = p^2 \Longrightarrow 2q^2 = (2r)^2 = 4r^2 \Longrightarrow$ (durch 2 teilen) $q^2 = 2r^2 \Longrightarrow q^2$ ist gerade $\Longrightarrow q$ ist gerade.
- Beim ersten Schritt haben wir geschrieben: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei p, q teilerfremd sind. Wir haben aber herausgefunden, dass p und q gerade sind, also nicht teilerfremd sein können. Wir haben nun einen Widerspruch. Die Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational ist, ist falsch. Damit folgt, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

Zur Beweismethode:

Wir wollen wissen, ob Peter im Kino war. Es gibt zwei Fälle: 1. Er war im Kino, 2. Er war nicht im Kino. Wir nehmen nun den 1.Fall an, wir glauben, dass Peter im Kino war. Durch Nachfragen erfahren wir, dass unsere Annahme falsch war. Daraus schliessen wir, dass Peter nicht im Kino war.

Bei unserem Beweis gibt es zwei Möglichkeiten: 1. $\sqrt{2}$ ist rational oder 2. $\sqrt{2}$ ist irrational. Wir haben angenommen, dass $\sqrt{2}$ rational ist und danach herausgefunden, dass dies nicht sein kann. Es bleibt nur noch Möglichkeit 2, nämlich dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

4 Intervalle

Welche Lösungsmenge hat die Ungleichung $2x < 5$ in den reellen Zahlen ?

$$2x < 5 \Rightarrow x < 2.5$$

Eine Ungleichung hat normalerweise unendlich viele Lösungen (in diesem Falle alle reellen Zahlen, die kleiner als 2.5 sind). Wie aber sollen wir solche Lösungsmengen in der Form $\mathbf{L} = ...$ notieren ? Das bisherige Vorgehen mit den geschweiften Klammern ($\mathbf{L} = \{...\}$) funktioniert leider nicht mehr (reelle Zahlen können nicht aufgezählt werden). Wir müssen uns also etwas neues einfallen lassen.

„Lückenlose “Teilmengen der reellen Zahlen nennen wir **Intervalle**. Für sie gibt es eigene Symbole: [,],(,). Beispiele von solchen Teilmengen sind:

- alle reellen Zahlen zwischen 2 und 5 (mit den Grenzen).

- alle reellen Zahlen zwischen -1 und 4 (ohne Grenzen).

- alle reellen Zahlen grösser als 3 (mit der 3).

Folgende Teilmengen sind **keine** Intervalle:

- alle reellen Zahlen zwischen 2 und 5 (mit den Grenzen), aber ohne 3 und 4.
- alle reellen Zahlen zwischen -1 und 4 (ohne Grenzen), aber ohne 0.

Intervalle eignen sich also vorzüglich, um Lösungmengen von Ungleichungen anzugeben. Es gibt **offene**, **halboffene** und **abgeschlossene** Intervalle. Untenstehende Tabelle soll einen Überblick bieten.

Beschreibung des Intervalls	Intervall-symbol	Art des Intervalls	Zeichnung des Intervalls
Die Menge aller Zahlen zwischen 3 und 5 einschliesslich der Grenzen	$[3,5]$	abgeschlossen	
Die Menge aller Zahlen zwischen 3 und 5 ohne Grenzen	$(3,5)$	offen	
Die Menge aller Zahlen zwischen 3 und 5 **mit** 3, aber **ohne** 5	$[3,5)$	halboffen	
Die Menge aller Zahlen zwischen 3 und 5 **ohne** 3, aber **mit** 5	$(3,5]$	halboffen	

Die Intervalle müssen nicht begrenzt sein, d.h. auf der linken Seite kann $-\infty$ oder auf der rechten Seite kann ∞ stehen. Es gibt dann noch folgende Fälle:

Beschreibung des Intervalls	Intervall-symbol	Art des Intervalls	Zeichnung des Intervalls
Die Menge aller Zahlen ≤ 3	$(-\infty,3]$	halboffen	
Die Menge aller Zahlen < 3	$(-\infty,3)$	offen	
Die Menge aller Zahlen ≥ 3	$[3,\infty)$	halboffen	
Die Menge aller Zahlen > 3	$(3,\infty)$	offen	

Übungen

12. Stelle die folgenden Intervalle graphisch dar:

    a) $(4,5)$ b) $[2,5]$
    c) $(0,6]$ d) $[7,9)$

13. Stelle die folgenden Mengen in geeigneter Weise symbolisch dar:

    a) Die reellen Zahlen von 2 bis 5 ohne die Grenzen.
    b) Die reellen Zahlen von 2 bis 5 mit der 2 aber ohne die 5.
    c) Die Zahlen 0,1,2 und 3.
    d) Alle reellen Zahlen kleiner als -1, mit der Grenze.
    e) Alle natürlichen Zahlen von 3 an, mit der Grenze.

14. Gib die folgenden Mengen in beschreibender Form an:

    a) $(2,4)$ b) $\{2,4\}$ c) $[2,4]$

15. Bestimme folgende Schnitt- bzw. Vereinigungsmengen.

    a) $[-1,2]\cap(0,4)$ b) $[-1,2]\cup(0,4)$ c) $[-3,0.5]\cup[-0.5,3)$
    d) $[-3,-0.5]\cap[-0.5,3)$ e) $\mathbf{N}\cap[0,6)$ f) $[-5,0)\cup[-1,4]$